北京高校数学教育发展研究中心
数学教育与教育数学研究丛书

首届（2015）北京高校数学微课程教学设计竞赛优秀作品集锦

北京高校数学教育发展研究中心　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

首届（2015）北京高校数学微课程教学设计竞赛优秀作品集锦 / 北京高校数学教育发展研究中心主编．—北京：电子工业出版社，2016.3

ISBN 978-7-121-28151-8

Ⅰ．①首…　Ⅱ．①北…　Ⅲ．①高等数学—课程设计—高等学校　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 027642 号

策划编辑：吴长莘
责任编辑：董亚峰
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：12.25　字数：314 千字
版　　次：2016 年 3 月第 1 版
印　　次：2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：88.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

为推动高等学校大学数学课程教学改革，鼓励教师将信息技术与教育教学内容紧密融合，促进教师更新教学理念、改进教学方法、创新教学设计、加强教师基本技能的训练、促进教师牢固树立爱岗敬业思想、磨炼教师教学内功、提升课堂教学水平、提高大学数学课程教学质量、落实教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会（以下简称教指委）工作要求，为教指委和全国高等学校教学研究中心共同主办的全国高校数学微课程教学设计竞赛推选选手，北京高校数学教育发展研究中心于2015年3月—2015年7月举办了“首届（2015）北京高校数学课程教学设计竞赛”活动。在北京市教委的大力支持下，在中心专家组和全体成员的共同努力下，本次比赛活动取得了圆满的成功。

参赛教师通过教学设计、课堂录像、课件制作等环节充分展示了北京地区高校广大数学教师的教学理念、教学实力、教学水平和教学风采。本次大赛为广大一线数学教师提供了充分展示自己课堂教学成果及教师基本功综合素质的舞台，诠释了全新的大学数学教学改革的理念，交流了最新的教育教学改革成果，对全面提升高校数学教师的教学水平和业务素质起到极大的促进作用。

教师的天职是教学，提高教育教学质量是学校永恒的主题，提高课程教学质量是提高教育教学质量的关键，而提高课程教学质量需要抓好教学基本技能的训练。为了方便老师们借鉴学习、加强交流和发挥优秀竞赛成果的辐射作用，经过专家的认真评审和讨论，最后从71件参赛作品中选择31件优秀作品集结出版。

由于编辑工作量较大、时间紧，且编者水平有限，如有不当之处，敬请作者和读者指正。

北京高校数学教育发展研究中心

2015年12月

目　　录

数列极限的概念

李　鹤

北京邮电大学

作 品 标 题：数列极限的概念

所 属 课 程：高等数学

相关知识点：数列极限的描述性定义；数列极限的精确定义；数列存在极限的几何解释

知识点编码：010202；010203；010204

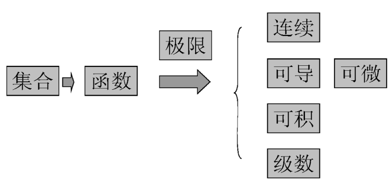
授 课 对 象：一年级理工科学生

授 课 时 长：18 分钟

参 考 文 献：[1] 北京邮电大学数学系．高等数学[M]．北京：北京邮电大学出版社．

[2] 李伟．高等数学[M]．北京：高等教育出版．

一、教学背景



上图所示为高等数学的主要研究脉络。其中，极限是研究微积分的基本工具，极限的概念是整个微积分的基础。因此，必须逐步让学生理解极限的概念，特别是数列极限的精确定义。这种严谨地描述概念的方法和中学有很大的区别，需让学生仔细领会这种差异。

二、教学目标

（一）知识层面

（1）了解数列极限的描述性定义；
（2）理解数列极限的精确定义；
（3）理解数列极限的几何解释。

（二）能力层面

（1）通过由描述性定义到精确定义给出的过程，让学生体会数学的符号语言及形式逻辑思维与日常人类语言及逻辑思维的关系。

（2）通过一个实例（分形图）引入本节课的内容，基于“将数学建模思想引入数学课程”，强调“研究动机”的全新教学模式，不仅给人以知识，而且给人以科学的思维与科学行动的方法与准则。

（3）通过阿基里斯悖伦的例子引导学生把所学知识和实际生活中的问题紧密联系在一起，让学生切实感触到“学数学受益”。

（三）认知层面

（1）认识到数学的双重逻辑结构，一方面是演绎科学，另一方面是来源于实际问题的研究。

（2）通过一个现实生活中的实际问题，加强数学与生活的联系，使学生明确学有所用。

（3）通过基于“将数学建模思想引入数学课程”的授课过程，让学生不断认识到应努力朝着“在研究中学习，在学习中思考，在思考中领悟，在领悟中完成学业”的目标努力。

三、教学内容

（一）教学思路

由惠施名言引出要讨论的问题
（给出所截木棒长度数列）

↓

给出数列存在极限的描述定义

↓

举例说明数列极限的情况

↓

给出数列存在极限的精确定义

↓

证明所截木棒长度数列极限成立

↓

给出数列存在极限几何解释

↓

小结与思考（阿基里斯悖论）

（二）教学重点和难点

1．本节课的教学重点

（1）数列极限的精确定义，即$\varepsilon-N$定义。

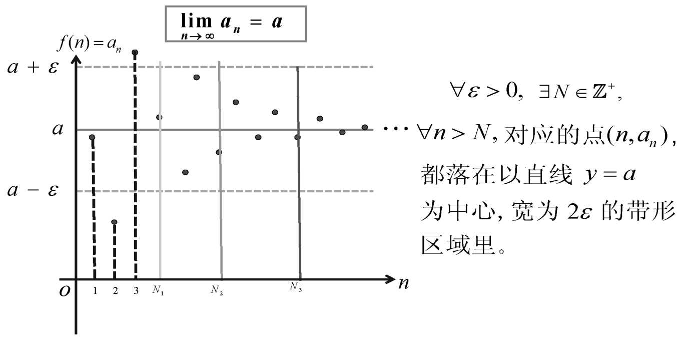
010203. 数列极限的精确定义

对数列$\{a_n\}$，若存在常数a，对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$恒成立，则称$\{a_n\}$以a为极限，记作$a_n\to a\ (n\to\infty)$或$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

此时也称数列$\{a_n\}$收敛于常数a，简称数列$\{a_n\}$ $\boxed{\text{收敛}}$

否则，称数列$\{a_n\}$不存在极限，简称数列$\{a_n\}$ $\boxed{\text{发散}}$

（2）收敛数列的几何解释。



处理方法：

（1）重点讲解结合多媒体技术的应用；

（2）验证所截木棒长度数列极限等式成立，巩固对精确定义的理解；

（3）数形结合的方法帮助学生分析问题；

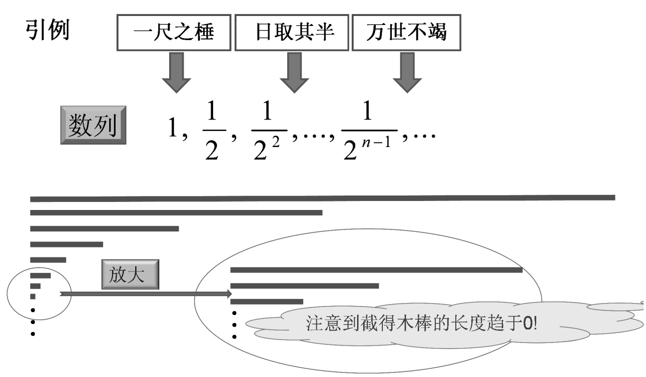
（4）通过提问的方式启发学生主动思考。

2．本节课的教学难点

理解数列极限的$\varepsilon-N$定义及利用定义证明极限。

处理方法：

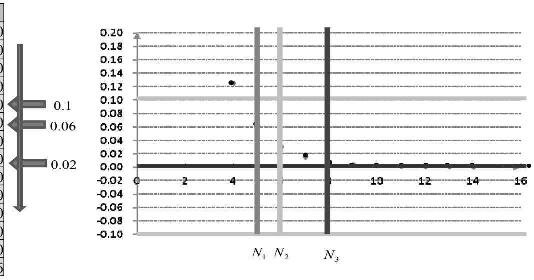
（1）借助数学的符号语言及形式逻辑思维与日常人类语言及逻辑思维的关系，由描述性定义给出精确定义。



（2）利用几何图形从直观上认识收敛数列的性质。

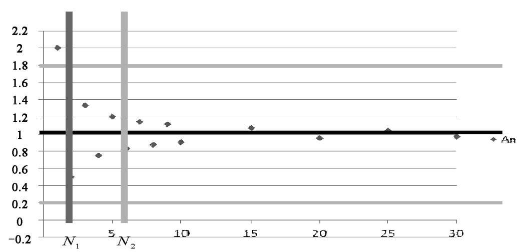
$$数列\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$$

n	An	|An−0|
1	1.0000000000000	1.0000000000000
2	0.5000000000000	0.5000000000000
3	0.2500000000000	0.2500000000000
4	0.1250000000000	0.1250000000000
5	0.0625000000000	0.0625000000000
6	0.0312500000000	0.0312500000000
7	0.0156250000000	0.0156250000000
8	0.0078125000000	0.0078125000000
9	0.0039062500000	0.0039062500000
10	0.0019531250000	0.0019531250000
11	0.0009765625000	0.0009765625000
12	0.0004882812500	0.0004882812500
13	0.0002441406250	0.0002441406250
14	0.0001220703125	0.0001220703125



$$数列\ \left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$

n	|An−1|
1	1
2	0.5
3	0.333333333
4	0.25
5	0.2
6	0.166666667
7	0.142857143
8	0.125
9	0.111111111
10	0.1
15	0.066666667
20	0.05
25	0.04
30	0.033333333



四、教学方法

（1）以概念讲授为主，适当穿插提问、思考等互动教学方式。

（2）以多媒体课件为主，制作中注重数字化特点、形式多样性，借助动画演示进行必要的启发和推导。

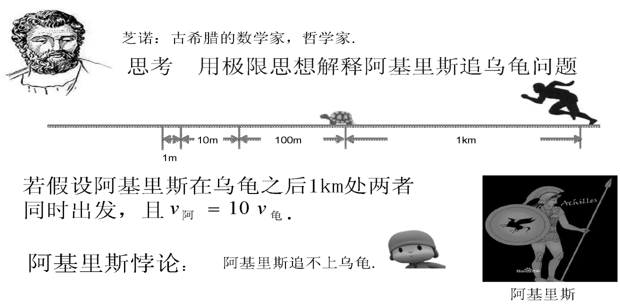
五、教学总结

（1）始终围绕“一尺之棰，日取其半，万世不竭”名言，给出一个表示所截得木棒长度的数列。从描述语言、精确语言、几何解释三个方面来阐明数列存在极限。

（2）讲授内容根据教材和课外资料综合整理而得。本节课的讲授内容基于“将数学建模思想引入数学课程”思想，强调“研究动机”的教学模式，通过庄子《天下篇》收录名言提出我们所关注的问题。

（3）数列极限的$\varepsilon-N$定义是教学的重点也是难点，在处理时，借助数学的符号语言及形式逻辑思维与日常人类语言及逻辑思维的关系，引导学生由描述性定义给出精确定义。

（4）极限定义介绍后，通过芝诺提出的“阿基里斯悖伦”的例子引导学生把所学知识和实际生活中的问题紧密联系在一起，让学生切实感触到“学数学受益”，激发了学生的学习兴趣，也活跃了学生的思维，同时鼓励学生主动发现问题并努力解决问题。



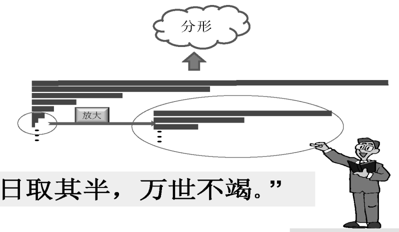
教学中注重几何直观的作用，介绍极限的几何意义，通过几何图形理解极限的性质，使得抽象思维同形象思维结合起来，充分展现问题的本质，突破学生理解上的难点。

小结　数列$\{a_n\}$以a为极限.

1. 描述性定义

2. 精确定义

3. 几何解释



“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

数列的极限

傅莺莺
北京工商大学

作 品 标 题：数列的极限
所 属 课 程：高等数学（文科）
相关知识点：数列、数列极限的性质
知识点编码：0102
授 课 对 象：文科一年级学生
授 课 时 长：14 分 40 秒
参 考 文 献：[1]赵树嫄. 微积分(第三版)[M]. 北京：中国人民大学出版社，2012.
[2]张楠，罗增儒. 对数学史与数学教育的思考[J]. 数学教育学报，2006,15(3).

教学背景

数列极限是微积分最基本、最核心的概念，是后续学习的基础。引导学生从认识极限的几何直观到理解其精确定义，对提高他们的数学能力和素养意义重大。

教学目标

知识目标：

（1）理解：数列极限的思想、图形直观。

（2）掌握：根据数列通项及图形，判断简单数列的敛散。
（3）了解：数列极限的数学定义。

能力目标：

通过实际问题，培养学生发现、分析和解决问题的能力。

教学内容

数列极限的图形直观与数学定义。

重点、难点分析

重点：数列收敛的图形直观、简单性质。
难点：极限的数学定义。

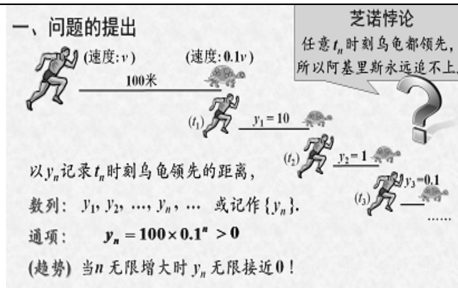
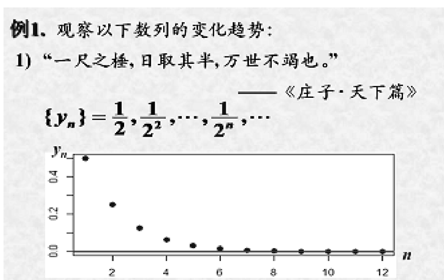
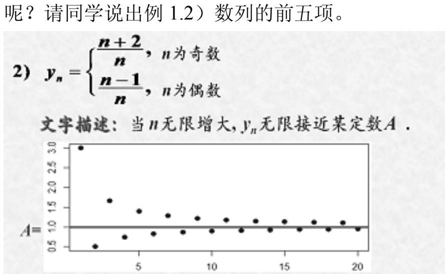
教学方法和过程（详见附表）

（1）问题引入：由芝诺悖论提出问题，引出极限思想。
（2）图形演示：用二维图形演示极限的直观。
（3）导出定义：结合动态演示，给出极限的数学定义。
（4）练习总结：练习运用几何直观判断数列敛散，引出收敛与有界的关系。
（5）问题解决：解答芝诺悖论。
（6）小结与作业：结合极限的主题，启示同学们在学习、生活中不断挑战自我极限。

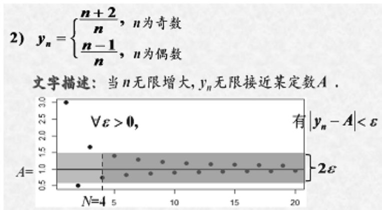
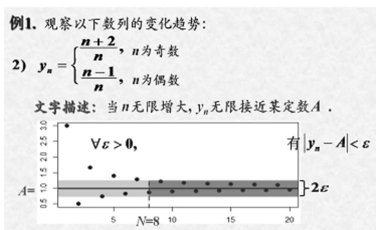
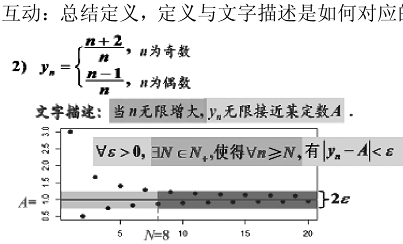
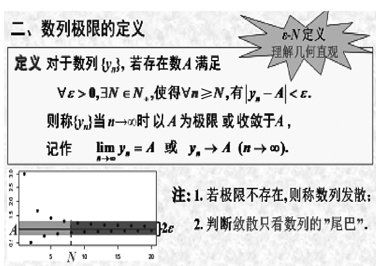
教学总结

问题导入、前后呼应、环环相扣；演示生动、互动活跃。

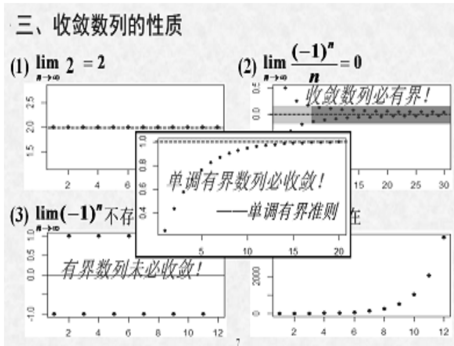
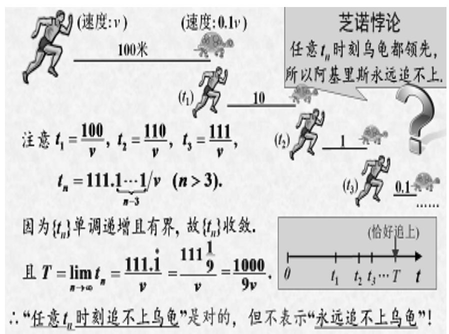
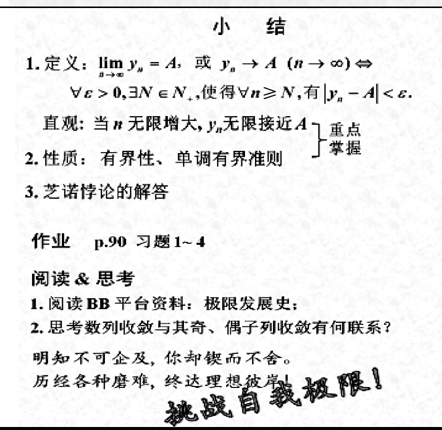
附表：教学方法和过程

教学步骤	教学内容与互动	呈现方式	教学方法
1.问题引入：由芝诺悖论提出问题，引出极限思想。 （2 分钟）	 互动：人能否追上乌龟？芝诺悖论错在哪儿？	PPT 动态演示芝诺悖论，激发学生学习兴趣	案例教学
2.图形演示：用二维图形演示极限的直观。 （2 分 30 秒）	追溯中国古代极限思想的起源  互动：极限是否意味着越来越接近？一般情况下呢？请同学说出例 1.2）数列的前五项。  	PPT 图形呈现数列的变化趋势，强化图形直观	引导发现、从特殊到一般

续表

教学步骤	教学内容与互动	呈现方式	教学方法
3.导出定义： 结合动态演示，给出极限的精确定义、记号。 （5 分钟）	互动：如何用数学语言严格定义“接近”？（距离）  互动：观察数列中点与带状区域的关系，区域变窄？（不论区域多窄，数列自某项开始必落入该区域）  互动：总结定义，定义与文字描述是如何对应的？  互动：直观上看，判断敛散需不需要关注前有限项？ 	PPT 动态演示带状区域变窄时，数列中的点与该区域的关系	探究式教学

续表

<table>
<tr><th>教学步骤</th><th>教学内容与互动</th><th>呈现方式</th><th>教学方法</th></tr>
<tr><td>4. 练习总结：练习运用几何直观判断数列敛散，并引出收敛与有界的关系。
（2 分钟）</td><td>互动：学生答题、收敛与有界有何关系？

</td><td>PPT 动态呈现内容</td><td>引导发现</td></tr>
<tr><td>5. 问题解决：
解答芝诺悖论。
（2 分钟）</td><td>互动：数列$\{t_n\}$的通项是多少？该数列有何特征？

</td><td>PPT 动态呈现，解释芝诺悖论中的错误所在</td><td>案例教学</td></tr>
<tr><td>6.小结与作业：结合极限的主题，启示同学们在学习、生活中不断挑战自我极限。
（30 秒）</td><td>
</td><td>PPT 呈现</td><td>总结教学、强调重点、联系实际</td></tr>
</table>

数列的极限

武修文
中央财经大学

作 品 标 题：数列的极限
所 属 课 程：高等数学（上）
相关知识点：数列极限的描述定义和精确定义
知识点编码：010202,010203
授 课 对 象：经管类大学一年级学生
授 课 时 长：17 分 30 秒
参 考 文 献：同济大学数学系．高等数学[M]．第六版（上）．北京：高等教育出版社，2007.

一、教学背景

极限理论是高等数学的理论基础，贯穿于高等数学整个知识体系，高等数学中许多重要的基本概念（如导数、微分、积分等）都是用极限概念来表述的，并且它们的运算和性质也要用极限的运算和性质来推导。因此，正确理解极限理论对于学好高等数学十分重要。数列的极限是极限的一类，与函数的极限形式不同，但它们的思想是完全相同的。通过数列极限概念的教学，让学生理解并掌握极限的思想和方法，为学习后续内容打下坚实的基础。

二、教学目标

1．知识层面

使学生了解极限的思想，掌握数列极限的准确概念，正确理解精确概念中所蕴含的逻辑关系，初步建立利用定义求解或证明数列极限的思路和方法。

2．能力层面

培养学生观察、分析、概括的能力，认识有限与无限、近似与精确、量变与质变的辩证关系，提高数学概括能力、抽象思维能力和审美能力。

3．认知层面

让学生体会由描述定义到精确定义的抽象中，数学的符号语言与逻辑思维所起到的巨大作用；从历史发展的角度介绍数列极限概念产生的历程，让学生感受数学发展的曲折进程，增强学好数学的信心。

三、教学内容

极限思想的重要性，极限思想的萌芽，数列极限的描述定义，定量刻画“无限增大”与“无限接近”，数列极限精确定义，定义的深度剖析，极限思想的发展历程与本质含义。

四、教学重点难点

1．教学重点

极限思想的本质，数列极限的描述定义，数列极限的精确定义，精确定义中蕴含的逻辑关系，正确理解ε和N的含义。

2．教学难点

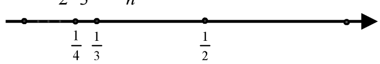
如何将数列极限的直观描述定义量化，理解用ε刻画无穷小，N 刻画无穷大；正确理解数列极限精确定义中的逻辑关系。

五、教学方法和过程

数列极限的学习，对学生来说是有限到无限认识上的一次飞跃，由于学生知识结构的局限性和学习习惯、方法的影响，学习过程中的困难会较大，根据一般的认识规律和学生的心理特征，本课程设计了直观认识→极限描述定义→量化认识→极限精确定义→定义深度剖析→极限思想归纳总结等教学步骤，由浅入深，由表及里，由感性到理性的逐步深化，力求使学生很好地理解极限的概念。

教学过程	教学方法和设计目的
（一）导入（30 秒） 介绍极限理论在高等数学中的特殊地位，强调学好极限概念的重要性，引入本节课的学习内容。	讲解，引起学生注意。
（二）概念引入（3 分 20 秒） （1）少年爱慕姑娘，姑娘拒绝了，她说：我整整比你大一岁。少年说：我 1 个月时，你 13 个月。你是我的 13 倍。我 2 个月时，你 14 个月。你是我的 7 倍。我一岁时，你两岁，你是我的两倍。只要你愿意和我长相厮守，我们总在慢慢接近。	讲述贴近生活的感性故事，引起学生注意，说明极限思想广泛存在。
（2）极限思想的萌芽：  引例 1：公元前四世纪，《庄子·天下篇》引用过“一尺之棰，日取其半，万世不竭”将其数量化，得到无穷等比数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$ 启发学生思考“万世不竭”的含义，并结合图形加以解释。	问题驱动，启发式讲解，渗透数学史与数学文化知识。 讲解与幻灯片演示同步进行，形、数结合，启发学生思考。
引例 2：魏晋时期的大数学家刘徽创造的割圆术中体现了深刻的极限思想。教师同学生一起按照割圆术的方法来验证刘徽的思路。在一个半径为 1	通过引入中国古代数学中两个蕴含

续表

教学过程	教学方法和 设计目的
的圆内分别作出圆内接正六边形、十二边形、二十四边形……启发学生观察圆内接正多边形与圆的接近程度，并将正多边形面积列举出来，启发学生观察当圆内接正多边形的边数无限增大时，其面积正在无限接近圆的面积。  刘徽 （三）总结引例 1、2 中数列的特点，给出数列极限的描述定义并深入分析（3 分 30 秒） “如果 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 的通项的值无限接近于一个常数 a，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n\to\infty)$。 （1）解释符号含义。 （2）问是否所有数列都具有极限，并举例回答，给出数列发散的定义。 （3）总结定义优缺点。 优点：直观、易懂。 缺点：不够严谨，因为含有“无限增大”“无限接近”这样定性描述的词汇。 提出科学的极限定义应该具备的条件：必须超越直观与想象，在运算和推理论证中具有可操作性。并指出下面的工作是尝试用定量的方法刻画两个“无限”。 （四）引入简单数列，具体介绍定量刻画两个“无限的”过程（5 分钟） （1）考察简单数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 给出动态图  当 n 无限增大时，数列通项 $a_n=\frac{1}{n}$ 无限接近于 0，如何定量描述“无限接近于 0”呢？ 考察 $\frac{1}{n}$ 与 0 的距离，即考察 $\left\|\frac{1}{n}-0\right\|$，显然 $\left\|\frac{1}{n}-0\right\|=\frac{1}{n}$，显然，$n$ 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，而“越来越小”又该如何定量刻画呢？ 引入一个想要多小就有多小的正数，用希腊字母 ε 表示，令 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，则可以通过取定不同的 ε 从而定量刻画 $\frac{1}{n}$ 越来越小。 （2）对数列进行量化分析，举例说明并反复强调 ε 所代表的“无穷小”的含义 令 $\varepsilon=\frac{1}{100}$ 时，则 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$	极限思想的经典案例，让学生对于极限的含义有所领悟，并有助于学生对于传统数学文化产生兴趣。 问题驱动 启发式讲解 幻灯片演示 Q1：两个引例中的数列有什么共同之处？ Q2：是否所有的数列都有极限？ Q3：数列描述定义的优缺点各是什么？ Q4：定义的缺点应该如何克服？ 连环设问，层层深入，引导学生思考从定性分析到定量刻画的转变应该如何进行。 解释无限的概念被理解的进程缓慢，降低学生畏难情绪。 提问、启发、互动、讲解、幻灯片展示。 选择简单数列，直观而便于理解。

续表

教学过程	教学方法和 设计目的
令$\varepsilon=\frac{1}{10\,000}$时，则$\frac{1}{n}<\frac{1}{10\,000}$ 显然，只要ε足够小，我们总可以让$\frac{1}{n}$和 0 无限接近。 着重强调ε不是一个固定常数，而是一个任意小的正数。 （3）对数列进一步量化分析，引入N，说明N的含义，并说明ε与N之间的关系。 显然，数列$a_n=\frac{1}{n}$并不是从第一项起就和 0 接近的，而是在n越来越大时才与 0 越来越接近，那么，如何刻画“n 越来越大”呢？是否可以找到合适的数列项数N，在这一项之后，即令$n>N$时，$\frac{1}{n}$和 0 之间的距离小于给定的ε。 令$\varepsilon=\frac{1}{100}$时，则$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，因而$n>100$，则取$N=100$ 令$\varepsilon=\frac{1}{10\,000}$时，则$\frac{1}{n}<\frac{1}{10\,000}$，因而$n>10\,000$，则取$N=10\,000$. 对于任意小的$\varepsilon>0$，则$\frac{1}{n}<\varepsilon$，因而$n>\frac{1}{\varepsilon}$，则取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，因此总可以找到这样的$N$，当$n>N$时，$\frac{1}{n}$和 0 无限接近。 （五）总结并给出数列极限的精确定义（1 分钟） （1）引入符号ε和N来量化“无限接近”与“无限增大” $\begin{array}{ccc} \boxed{n\to\infty} & \longrightarrow & \boxed{a_n\text{无限接近}0} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ n>N(\varepsilon) & \xrightarrow{\text{确保}} & \|a_n-0\|<\varepsilon \end{array}$ （2）给出数列极限的精确定义， $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 存在$N(\varepsilon)$, 使得当$n>N$时, $\|a_n-a\|<\varepsilon$成立 （3）说明精确定义的创立者，并指出精确定义的出现说明了人类对于极限的认识产生了质的飞跃。 （六）深入分析数列精确定义的内涵（3 分 20 秒） （1）分析定义内逻辑关系是从结论出发寻找条件，如果满足结论的条件存在，那么结论自然是成立的。即对于任意小的$\varepsilon>0$，首先假定$\|a_n-a\|<\varepsilon$成立，来处理这个关于 n 的不等式，看是否能找到满足条件的 N。这种逻辑为利用定义证明和计算数列的极限提供了方法和思路。 （2）ε是事先给定的任意小的正数，它具有两重性。一是绝对的任意性，因此它不是一个固定的常数，它是用来刻画a_n无限接近于常数 a 的程度的；	设计简单问题，不断发问，并给出相应答案，引导学生的思路紧跟教师思路。 学生对于希腊字母不熟悉，此时需适当放慢，反复强调。 简单举例，便于学生理解和接受ε的任意性。 提问、启发式讲解 简单举例，通过例题反复强调N代表的含义，以及它是如何确定的，力求学生留下深刻印象。 总结并讲解 详细讲述精确定义的内容，给出“$\varepsilon-N$定义”说法的由来。 介绍精确定义的创立者，在幻灯片上写出两位数学家的贡献，渗透数学史知识。 重点讲解，板书推演，适当放慢速度。 梳理精确定义的逻辑关系，帮助学生正确理解和掌握。

续表

教学过程	教学方法和 设计目的
二是它的相对确定性，ε 一经取定，就相对固定了下来，以便根据它去求出 N。 （3）N 的相对存在性。N 由相应的 ε 确定，一般 ε 越小，N 越大，有时 N 也记成 $N(\varepsilon)$,但并不意味着 N 由 ε 唯一确定。N 重要的是存在，而不在乎其大小。 （4）回应本节课开头，说明用极限定义已经严谨地证明了少年劝慰姑娘的话，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。 （七）总结本节课主要内容，梳理极限概念的发展历程，阐述极限思想的本质。（50 秒）	点明 ε 的绝对任意性和相对确定性。 指出 N 存在与否是数列极限是否存在的关键，着重强调 N 的含义，为后续介绍极限的几何解释打下伏笔。 回应开头部分，放松课堂气氛，张弛有度。 讲解，给学生留下思考空间

六、教学总结

本次授课方式将提问、启发、互动与讲解相结合，将幻灯片展示与板书推演相结合。在教学设计中注重感性与理性相结合，严谨与趣味相结合，古典与现代相结合。在传授中注重渗透数学思想和数学文化，提升学生对于数学的理解和认识，开拓他们数学思维的深度和广度。

在教学中需观察学生的学习状态，适时放慢速度，反复强调，力求让学生深刻理解极限思想的本质，为后续学习打下良好的基础。

罗尔定理及其几何意义

鞠红梅
北京物资学院

作品标题：罗尔定理及其几何意义
所属课程：高等数学
相关知识点：罗尔定理及其几何意义
知识点编码：030101
授课对象：大学一年级学生
授课时长：11 分钟
参考文献：同济大学数学系编．高等数学[M]．上册．北京：高等教育出版社．

一、教学目标及要求

（1）掌握罗尔中值定理的内容；
（2）理解罗尔中值定理的几何意义及其在导数应用中的作用；
（3）理解罗尔中值定理与零点定理的区别与联系。

二、知识点分析

（1）重点：罗尔中值定理的内容。
（2）难点：罗尔中值定理与零点定理的区别与联系。
（3）关键点：利用渐进而启发式的提问，引导学生自己发现罗尔定

理的条件、结论；利用对比分析，引导学生分清罗尔定理和零点定理的区别与联系。

三、教学方法及教学手段

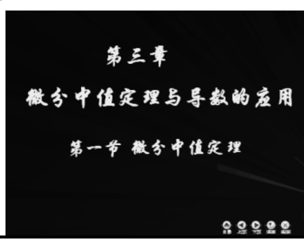
（1）运用课堂提问、启发、演示等多种教学方法，调动学生的学习积极性，激发学生的学习兴趣。

（2）使用现代教育技术手段，PPT 与板书内容结合。

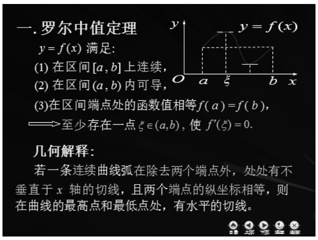
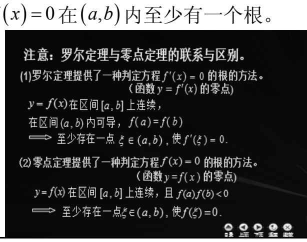
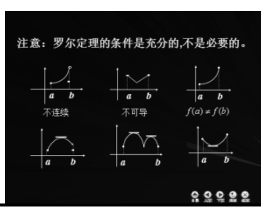
四、教学背景

学生经过第二章导数与微分的学习，已经掌握导数和切线斜率之间的关系，也具备一定的抽象思维能力，引入罗尔中值定理的内容不是很困难，但要格外注意渐进而启发式的教学方法，使学生能够在潜移默化中掌握事物的本质。

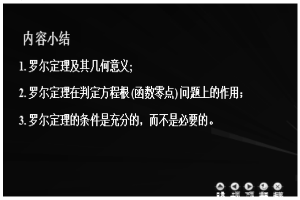
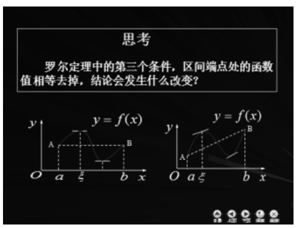
五、教学内容与教学设计

教学内容	设计方案及意图	教学手段	教学时间
在第二章我们学习了导数的概念和计算方法，从本章开始我们共同学习导数的应用。而作为导数应用的理论基础，第一节课我们来共同学习微分中值定理。 	引入本节课的内容	讲授	0.5 分钟

续表

<table>
<tr><th>教学内容</th><th>设计方案及意图</th><th>教学手段</th><th>教学时间</th></tr>
<tr><td>1．讲授罗尔定理的内容，阐述其几何意义。

</td><td>PPT 先给出 $f(x)$ 图像，启发学生自己观察图像中的函数有什么几何特征，即罗尔定理的三个条件，继续启发学生去找图像是否存在切线水平的点。都完成后，再提问：这些切线水平的点的存在性是必然的吗？从而引入罗尔定理。几何意义可以帮助学生从直观上理解罗尔定理，有助于学生对罗尔定理的记忆</td><td>板书加 PPT、讲授共同完成</td><td>3 分钟</td></tr>
<tr><td>2. 简要介绍罗尔定理在导数应用方面的用途，以及它和零点定理在使用中的区别与联系。
（1）罗尔定理可以用来讨论方程 $f'(x)=0$ 根的存在性，因为罗尔定理的结论 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$ 等价于方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。
（2）零点定理可以用来讨论方程 $f(x)=0$ 根的存在性，因为零点定理的结论 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$ 等价于方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。

</td><td>这部分内容可以帮助学生将学到的知识和以前已有的知识进行联系和比较。目前学生所学的知识中，两个定理可讨论根的存在性：零点定理和罗尔定理，它们的区别是：零点定理的条件是 $f(x)$ 连续，结论判定 $f(x)=0$ 的根的存在性；罗尔定理的条件是 $f(x)$ 连续、可导，结论判定 $f'(x)=0$ 根的存在性。因此，把两个定理做简单的联系和比较是很必要的</td><td>PPT 和板书、讲授共同完成</td><td>3 分钟</td></tr>
<tr><td>3．讲授罗尔定理在应用中要注意的地方。

</td><td>帮助学生更好地把握罗尔定理条件是充分的而非必要，结合两组曲线来说明清晰简便，印象深刻</td><td>PPT 和讲授共同完成</td><td>3 分钟</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学内容</th><th>设计方案及意图</th><th>教学手段</th><th>教学时间</th></tr>
<tr><td>4.内容小结

</td><td>对本节课内容做总结，帮助学生巩固本节课的重要知识点</td><td>讲授</td><td>0.5 分钟</td></tr>
<tr><td>提问：罗尔定理中的第三个条件，区间端点处的函数值相等如果去掉，结论会发生什么改变？

</td><td>让学生带着问题，在课后主动学习，发现事物的规律，为引入拉格朗日中值定理做准备</td><td>提问式</td><td>1 分钟</td></tr>
</table>

六、教学总结

（1）罗尔定理内容的讲授，其条件和结论完全是引导学生通过几何图形，发现规律而得到的。学生对自己能够发现问题的规律感到欣喜，同时对本节的重点内容也记忆深刻。

（2）罗尔定理和零点定理都可以用来判断方程根的存在性，其区别和联系在本节课关联是非常必要的，学生在本节课不仅回顾了已有的知识，又学到了新的知识，新旧知识的比较分析，对于学生同时掌握这两个定理更加清晰容易。

（3）罗尔定理的条件是充分的，而不是必要的，这一点通过两组图像的比较清晰可见，学生印象会比较深刻。

（4）由两个图像的比较，引入即将学习的拉格朗日中值定理，提前为学生的课下自学做了很好的引入，学生可以带着问题主动去发现事物的规律。

拉格朗日中值定理

袁晓娜
北京建筑大学

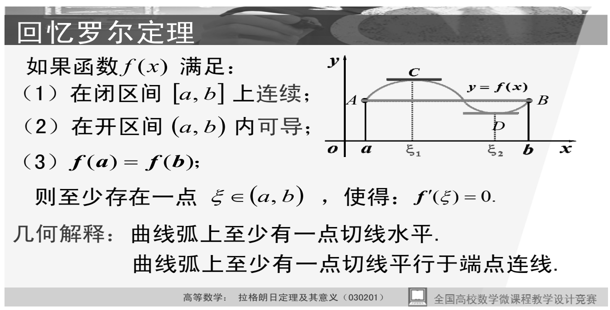
作 品 标 题：拉格朗日中值定理部分内容
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：拉格朗日定理及几何意义
拉格朗日定理的证明
知识点编码：030201　030202
授 课 对 象：工科大一学生
授 课 时 长：17 分钟
参 考 文 献：

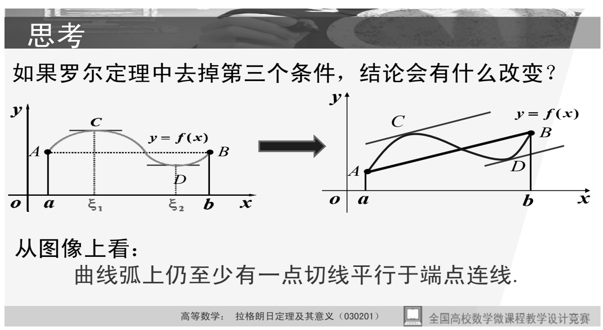
[1] 同济大学．高等数学[M]．第七版．北京：高等教育出版社.
[2] 斯蒂芬 · 弗莱彻 · 休森．数学桥：对高等数学的一次观赏之旅[M]．邹建成，杨志辉，刘喜波，等译．上海：上海科技教育出版社.

拉格朗日中值定理是微分学中一个非常重要的定理。本次课从一张北京街头拍摄的照片出发，让学生从直观上感受到这个定理的重要地位，从而对授课内容产生兴趣。

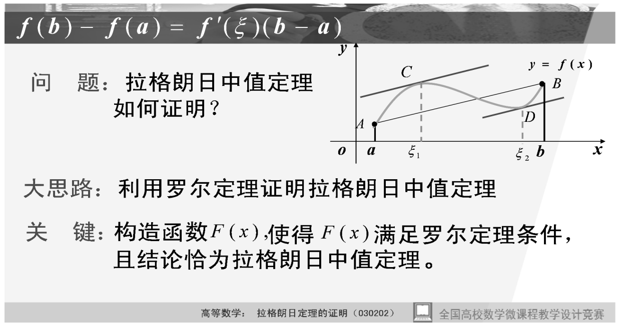
本次课的教学目标是掌握拉格朗日中值定理的内容、几何意义及证明方法。其中用构造法证明该定理是本次课的难点。

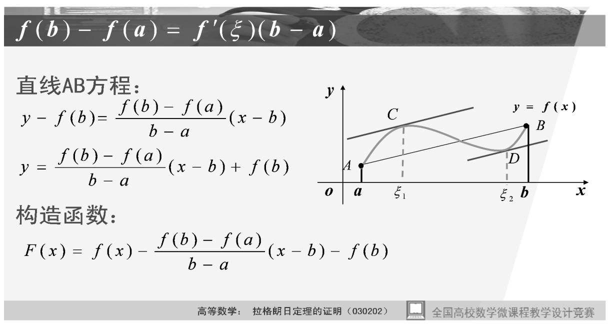
课堂上采用启发式教学，从学习过的罗尔定理出发，结合图形，让学生自己“探索、发现”出拉格朗日中值定理的内容和几何意义。

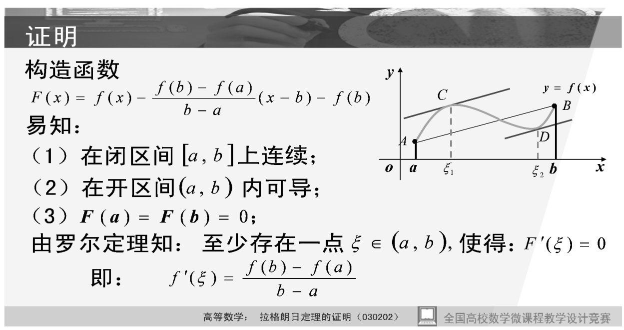




定理的证明过程中，再次结合图形，逐步分析引导，带领学生一起合理地把这个函数构造出来，从而顺利完成证明。整个过程完整流畅，让同学们感觉这次课的知识不是老师讲授的，而是“我”和老师一起一步步探索得到的。







通过本次课的学习，同学们不仅可以学习到拉格朗日中值定理、几何意义，以及它的证明、学习如何用构造法证明相关问题，而且还可以体验数学学习中探索带来的乐趣、认识著名数学家拉格朗日、欣赏到北京珠市口大街的一处有特色的景色，收获颇丰。

$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$

思考1：拉格朗日中值定理中，若$f(a)=f(b)$，
可得出什么结论？

结论1：罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例.

思考2：拉格朗日中值定理中，若$f(x)$表示变速直线
运动的位移函数 $s(t)$，则该定理说明了什么？

结论2：$v(t^*)=s'(t^*)=\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}=\bar{v}$

高等数学：拉格朗日定理的证明（030202） 全国高校数学微课程教学设计竞赛

小结

$$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$$

拉格朗日中值定理在微分学中占有重要地位，
也被称为微分中值定理。

高等数学：拉格朗日定理的证明（030202） 全国高校数学微课程教学设计竞赛

定积分问题举例——曲边梯形的面积

赵尚威
中央民族大学

作 品 标 题：定积分问题举例-曲边梯形的面积
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：定积分问题举例
知识点编码：050101
授 课 对 象：理工科大一本科生
授 课 时 长：13 分钟

1. 教学背景

已经完成第四章不定积分的教学，开始进入第五章定积分的学习。通过介绍定积分问题举例——曲边梯形的面积，为定积分概念的引入做准备。

2. 教学目标

（1）认知目标：通过实际背景引入曲边梯形的概念，经历求曲边梯形面积计算方法的形成过程，使学生理解求曲边梯形的一般步骤，从而使得学生了解定积分概念的实际背景，为下节课定积分概念的引入做铺垫。

（2）能力目标：通过问题的探究，体会以直线代曲线、以不变代变

及无限逼近的数学思想；通过从圆面积到曲边梯形面积计算方法的过渡，让学生领会类比迁移的思想。

3. 教学内容

本小节讲授高等数学第五章第一节“定积分的概念与性质”中的“定积分问题举例——曲边梯形的面积”。

4. 重点难点

（1）重点：一般曲边梯形面积的求解方法；分割、近似代替、求和、取极限的数学思想。

（2）难点：如何将圆面积计算方法类比迁移到求解曲边梯形面积；对以直线代曲线和无限逼近思想的理解。

5. 教学方法

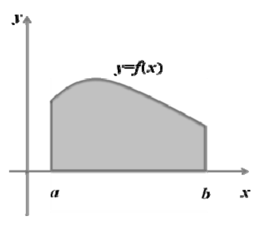
（1）比照式教学方法。

（2）启发式教学方法。

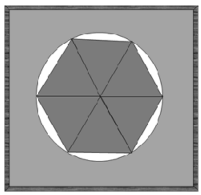
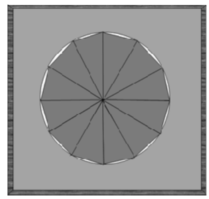
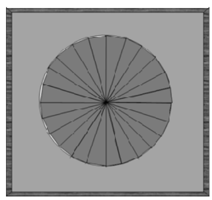
6. 教学过程

教学步骤	教师调控与学生活动	教学内容	教学意图
一、问题引入，给出曲边梯形的定义 （2 分钟）	复习	**知识回顾** 复习基本几何图形： 矩形、梯形、三角形、平行四边形； 任意一个直边图形都可以分割为有限个基本几何图形，进而求出面积，举例	回顾基本几何图形，唤起学生对直边图形面积求法的记忆，为曲边梯形面积的引出做铺垫

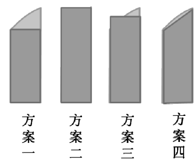
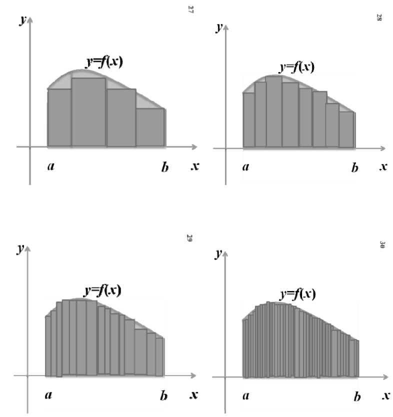
续表

教学步骤	教师调控与学生活动	教学内容	教学意图
一、问题引入，给出曲边梯形的定义 （2分钟）	教师展示课件，学生观察思考 教师讲授	**引入问题** 首先观察两幅图片：第一幅图是我国的赵州桥，第二幅图是美国麻省理工学院的 kresge 礼堂，请同学们观察赵州桥桥洞的横截面图形与 kresge 礼堂外立面的轮廓图形有什么共同的特点。   介绍定义： 曲边梯形是由三条直线 $x=a,x=b,x$ 轴和一条连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$ 围成的图形。  	这两幅图都是生活中典型的曲边梯形的例子，通过引导学生自己观察，总结曲边梯形的特点，为给出曲边梯形的定义做准备。 给出曲边梯形的数学定义，引出本节课要介绍的主要内容——曲边梯形的面积计算
二、求解曲边梯形面积的方法（5分钟）	回顾刘徽割圆术，复习圆面积的计算方法	**（一）回顾圆面积计算方法** 分割：将圆分割为若干个扇形； 近似代替：每个扇形的面积用一个三角形的面积近似代替；	介绍古代圆面积的计算方法，让学生感受我国传统数学文化的同

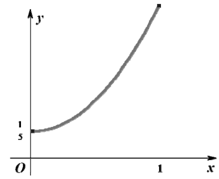
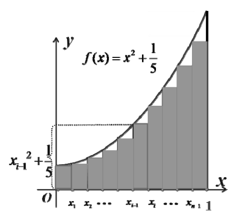
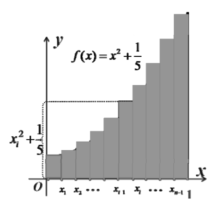
续表

教学 步骤	教师调控与 学生活动	教学内容	教学 意图
	教师展示并讲解割圆术的具体做法，启发学生思考 教师总结	求和：将矩形面积求和； 取极限：分割无限加细，矩形面积的和的极限就是曲边梯形的面积。    通过观察可以看出，对圆的分割越细，小三角形的个数越多，三角形的面积和就越接近于圆的面积。体现了以直线代替曲线和无限逼近的数学思想。 “……割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣……”——刘徽	时，体会分割、近似代替、求和和无限逼近的数学思想，为将这种思想类比迁移到曲边梯形的面积求解中做准备
	利用类比给出求解曲边梯形面积的基本思想。 教师提问，学生思考回答	**（二）曲边梯形面积求解的思想方法** 类比圆面积计算方法，分析通过分割、近似代替、求和、取极限 4 个步骤求解曲边梯形面积的可行性。 分割：将曲边梯形分割为若干个小的曲边梯形。 近似代替：每个曲边梯形的面积用一个直边图形的面积近似代替。 **提问**：用来近似代替曲边梯形的直边图形该如何选取？	引导学生思考利用割圆术的方法计算曲边梯形面积的可行性，培养学生类比迁移的能力。 近似代替曲边梯形的直边图形是不唯一的。教师通过提问启发学生思考。学生可能

续表

教学 步骤	教师调控与 学生活动	教学内容	教学 意图
	教师展示课件 教师和学生一起总结	 事实上，梯形和矩形都可以作为曲边梯形的近似图形，这里采用矩形来近似代替小的曲边梯形。 求和：矩形的面积进行求和。 取极限：对曲边梯形的分割无限加细，矩形的面积和就等于曲边梯形的面积。 以下是用矩形来近似代替小曲边梯形从而得到曲边梯形面积的过程。  **总结：** 对曲边梯形的分割越细，小矩形的个数就越多，矩形的总面积就越接近于曲边梯形的面积。当分割无限加细时，矩形的面积就等于曲边梯形的面积	会提出不同的方案，教师引导学生考虑利用最简单的直边图形——矩形来近似代替曲边梯形。 结合课件展示利用矩形近似代替曲边梯形的过程，使学生从直观上理解求解曲边梯形面积的基本思想。 通过师生的共同观察得出求曲边梯形面积的基本思想
	教师结合课件讲解	**（三）用数学语言描述求解曲边梯形面积的一般步骤** 分割： $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	总结上述思想，用数学语言描述求解曲边梯形面积的一般步骤

续表

教学步骤	教师调控与学生活动	教学内容	教学意图
		近似代替： $$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$ 求和： $$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$ 取极限 $$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$$	
三、应用举例（4分钟）	举例说明 教师展示课件进行讲授	**举例：** 求曲线 $y = x^2 + \frac{1}{5}$ 与 $x = 1$、x 轴和 y 轴所围成的区域的面积。  **解：**  方案一 选取方案一中的矩形近似代替小曲边梯形，通过分割、近似代替、求和、取极限4个步骤可以求出 $S = \frac{8}{15}$  方案二	举例说明求解曲边梯形面积的一般步骤，加深学生印象。 通过具体例子可以看出用两种矩形的选取方案近似代替小曲边梯形，最终的计算结果均相同。即两

续表

教学步骤	教师调控与学生活动	教学内容	教学意图
	演示动画 布置思考题	类似地，可以选取方案二中的小矩形面积作为小曲边梯形面积的近似值，经过分割、近似代替、求和和取极限4个步骤可以得到与方案一相同的答案。 教师通过动画演示，向学生展示两种不同的方案得到的结果是相同的。 **思考题：**采取方案三和方案四是否可以得到相同的结果？留作学生课下思考	种不同的矩形选取方法不影响曲边梯形面积的计算结果。 通过动画演示，增加学生的直观印象。 启发学生思考，留作课下练习
四、总结（2分钟）	教师和学生一起回忆本节课主要内容	**总结：** **1.** 本节课主要讲授了求曲边梯形面积的一般步骤： **分割 ➤ 近似代替 ➤ 求和 ➤ 取极限** 2. 用上述和式的极限求曲边梯形面积的方法是相对复杂的，那么是否存在简单可行的方法来计算曲边梯形的面积呢？事实上，上述和式的极限正是这是我们本章要介绍的内容——定积分的概念，而定积分的计算可以转化为曾经学习过的原函数的计算	总结的同时提出定积分计算曲边梯形面积，为下节课的内容做铺垫

7. 教学总结

本小节通过分析总结了求解曲边梯形面积的一般方法：分割、近似代替、求和、取极限，得出曲边梯形的面积是一个特殊和式的极限的形式，这正是我们要介绍的定积分的概念。通过定积分问题举例，为定积分概念的引入做准备。

曲率的概念的教学设计方案

齐凤华
北京物资学院

作 品 标 题：曲率的概念
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：平面曲线的曲率
知识点编码：031102
授 课 对 象：理工科、经管类本科生
授 课 时 长：13 分钟
参 考 文 献：[1] 同济大学数学系编. 高等数学[M]. 第六版. 北京：高等教育出版社. 2007.
[2] http://www.guokr.com/article/439344/

【教学背景】

目前有很多高校的数学教育还在延续高中模式，过于重视计算和解题，而忽视了培养学生的实用意识、数学思维和兴趣，以及引导学生利用数学知识解决实际问题的能力，使得学生在学完数学之后觉得数学是无用的，只是单纯的计算和记公式，造成学习兴趣的缺失。在讲解《高等数学》第三章第七节中的平面曲率的概念时，由生活中常见的例子开始，让学生了解数学概念大多来源于生活，并可以反作用到现实生活中去。通过观察总结让学生意识到数学的思维。使得枯燥难懂的概念变得容易理解。

【教学目标】

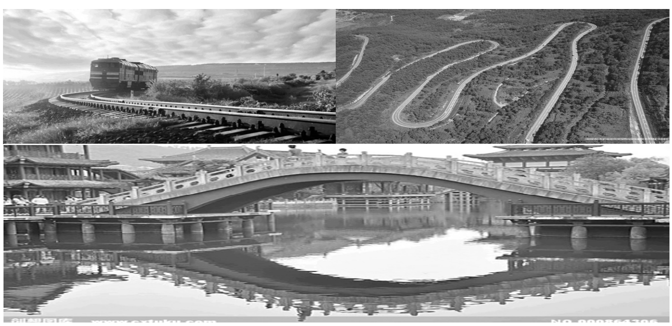
从现实生活中常见的实际例子出发，引出为什么学习曲率。通过数形结合，使学生大致猜测出曲率的定义，并通过直观的例子来验证所给出的概念，培养学生的观察能力、推导能力及解决实际问题的能力。

【教学内容及重点难点分析】

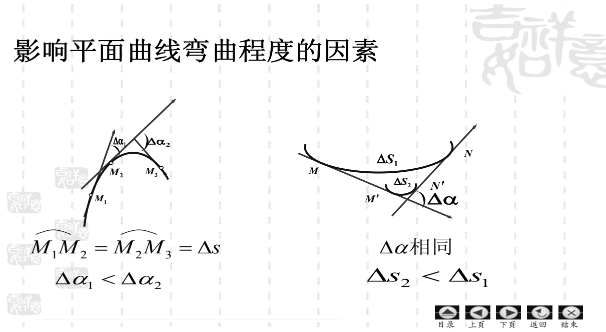
平面曲率的概念的引入及分析，重点为通过观察得到曲率定义式。

【教学方法和过程】

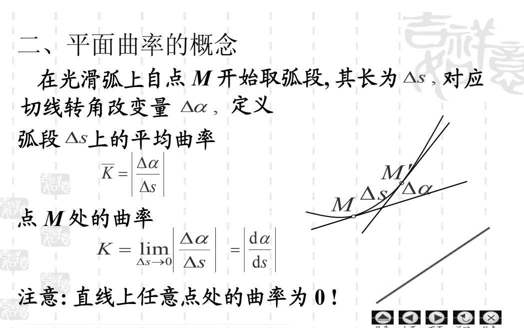
（1）引入：利用多媒体课件展示转弯时的铁轨、盘山公路及拱形桥，说明数学概念大多来源于现实生活，并通过图片说明为什么要研究平面曲线的弯曲程度——平面曲线的曲率。



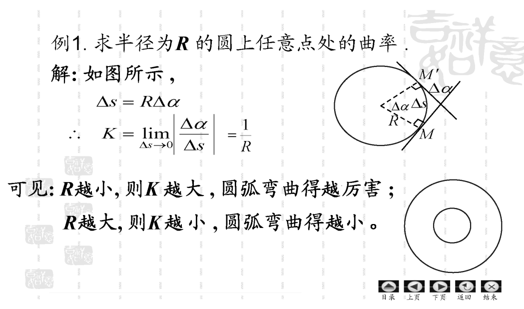
（2）分析概念的给出过程：利用两个直观的图像，启发学生分析影响平面曲线弯曲程度的因素，使得学生理解概念的由来。



（3）**给出概念**：通过以上观察结果给出平均曲率概念式，并通过图形分析一点处曲率与平均曲率的关系，进而给出一点处曲率概念。



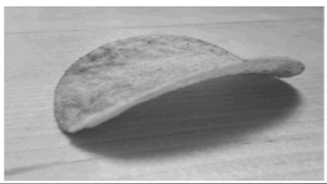
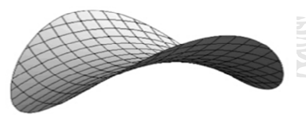
（4）**用实例验证、巩固概念**：通过直观观察与定义分析直线与圆的曲率，进一步验证概念的合理性。



（5）**引出下节课内容及本节的拓展**：说明曲率概念式的抽象与不实用性，继而启发学生利用上节课所学的弧微分公式思考曲率的计算式。开放式结尾，引出平面曲率的扩展——空间曲率的问题，说明如果了解了

空间曲率就可以解释生活中的更多现象，调动学生的学习热情及兴趣。




【教学总结】

通过生活中的实例来引出为什么要研究曲率，接着利用数形结合的方式分析曲率概念的由来，继而给出曲率概念，用两个生活中最直观的例子来巩固概念，最后分析概念的局限，引出下节课内容，并通过本节课的扩展激发学生学习的热情和兴趣。

平面曲线的曲率

袁安峰
北京联合大学

授课课程：《高等数学》
授课章号：第三章　微分中值定理与导数的应用
授课节号：§3.7 平面曲线的曲率
知识点编号：031102、031103
授课时间：19 分钟
授课对象：一年级工科本科生

一、“高等数学”课程介绍

课程简介：高等数学课程是高等院校工科类本科各专业的一门主要基础课程。主要内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何学，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数与常微分方程等。

主要任务：通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还要特别注意培养学生的熟练运算能力和综合运用所学知识去分析解决问题的能力；使学生掌握微积分学的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础。

二、教学目标

1. 知识目标

- 理解平面曲线曲率的概念。
- 掌握平面曲线曲率的计算公式，会求平面曲线在一点处的曲率。
- 了解利用曲率解决一些简单的实际问题。

2. 能力目标

- 通过钢梁的弯曲和火车轨道的弯曲等实例分析，让学生积极主动探索平面曲线曲率概念的形成过程，培养学生的抽象思维能力。
- 通过对平面曲线曲率公式的数学推导过程，培养学生的逻辑推理能力。
- 让学生学会运用曲率知识解决实际问题，提高学生运用所学知识去分析解决问题的能力。

3. 情感目标

- 通过曲率在生活中的应用培养学生发现问题、解决问题的抽象逻辑能力，享受数学美。
- 通过曲率概念的形成到应用让学生感受名言“数学来源于生活，又服务于生活”，以及探索的乐趣和成功的喜悦。

三、教学内容分析

1. 教学内容

- 平面曲线曲率的概念。
- 平面曲线曲率的计算公式。
- 曲率的应用。

2．教学重点

- 平面曲线曲率的概念。
- 平面曲线曲率的计算。

3．教学难点

- 平面曲线曲率的概念。
- 曲率的应用。

解决方案：复习前面的知识，启发式进行曲率公式的推导；利用启发式教学、问题驱动法、发现法，应用已有的数学知识解决问题。

四、学生特点分析及解决方案

1．学生特点

- 我校是普通类本科院校，学生很大一部分来自北京，数学功底相对比较薄弱，部分同学有厌学情绪。
- 部分同学觉得数学就是学习计算技巧，更有部分同学坚持“数学无用论”。

2．解决方案

- 讲授过程中强调数形结合法和数学思想的传输，讲解尽量形象化，同时让学生利用学校的网络资源（如网络课堂等）进行自主预习和学习。
- 讲授时由生活经验得到数学概念，做到将复杂抽象的数学知识简单化。

五、教学创新点

1．教学中运用启发性教学、问题驱动式教学，时刻调动学生的积极性

教学中注意启发性教学、问题驱动式教学，开始先以生活中的简单

实例让学生明白今天要解决的问题，再从生活经验提出数学上的概念。同时，课上时时刻刻抓住学生，让学生的思维跟着教师的进程，不断以思考、设问等方式来调动学生的积极性，提高学生对课堂的兴趣。在讲授中尽量以通俗的方式让学生能把要接受的知识点与生活中熟悉的内容进行联系和对比，加强理解。

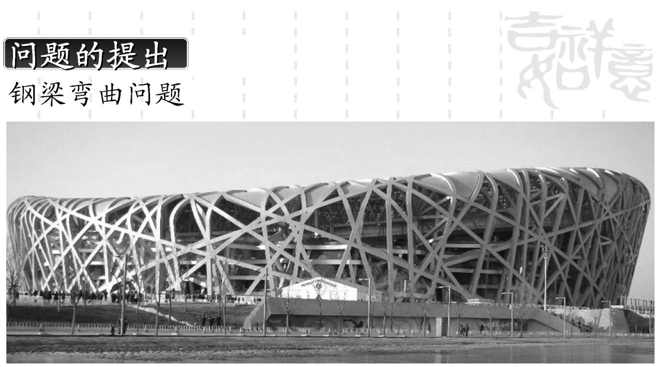
2．以“数学来源于生活，又服务于生活”为主线，不是 “为了讲数学而讲数学”，培养学生数学建模的思想和近似表示的思想

曲率是为了解决生活中的实际问题而引入的数学概念，让学生理解数学概念不是那么抽象，而是为了解决问题需要而设置的，数学来源于生活，又服务于生活。培养学生从生活中发现问题、解决问题的能力，为以后的数学建模课程打下良好的基础，为将来工作解决实际问题打下基础。

六、思路设计

采取“问题—理论—问题”的思路

问题的提出——通过钢梁弯曲和火车弯道实例提出问题，导入新课。



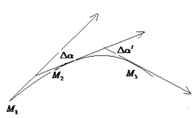
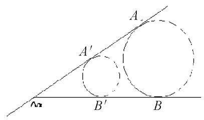
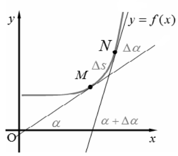
曲率的概念——通过分析影响曲线弯曲程度的量引入曲率的概念；
曲率的计算——导出平面直角坐标系下曲线的曲率的计算公式；

例题及应用——通过实例理解曲率的概念，解决引入中的实际问题；
思考与小结——扩展所学的内容，巩固学过的内容。

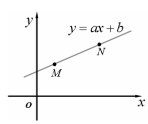
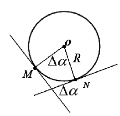
七、教学过程

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
引言	我们已经讨论过曲线的凹凸性，知道如何判断曲线的弯曲方向，但是在许多实际问题中都必须考虑曲线的弯曲程度	联系凹凸性内容，通过设问方式进行	引导学生对要讲的内容产生兴趣	
问题的提出	**一、问题的提出** 1．钢梁弯曲问题 先用一个木棒（自制教具）来演示棒的弯曲，木棒在外力的作用下会发生弯曲，当弯曲到一定程度，木棒会折断，同样，建筑中也要考虑钢梁在荷载作用下的弯曲问题。 2.火车轨道问题 先播放一个 2013 年 7 月 24 日发生的西班牙火车脱轨视频。火车脱轨是由于在过弯道的时候车速太快造成的。一般在转弯的时候都要限速，速度跟铁轨的弯曲程度有关。 **思考问题** (1)曲线的弯曲程度与哪些因素有关？ (2)怎样用数量描述曲线的弯曲程度呢？ 数学来源于生活，又服务于生活。 下面先从几何直观入手，分析曲线的弯曲程度是由哪些量确定的。 首先，如图 1 所示，若曲线 L 上有三个点 M_1，M_2，M_3，其中 M_1 到 M_2 和 M_2 到 M_3 的弧长相同，动点从 M_1 移动到 M_2，曲线上 M_1 点的切线相应地变动到 M_2 点的切线，切线转过的角度（简称切线转角）为 $\Delta\alpha$，动点从 M_2 移动到 M_3，切线转过的角度为 $\Delta\alpha'$，	通过生活实例来感知今天的主题。 通过设问的方式带领学生思考问题，找出核心。 动画演示与曲率有关的因素，此处，引导学生得到刻	导入式的教学可以让学生更深刻地体会知识和掌握知识。生活中的实际例子可以提高学习的热情，解决数学比较枯燥的问题。 让学生参与到数学概念的形成过程中，深刻理解数学概念的形成过程，培养数学	1.5 分钟 2.5 分钟

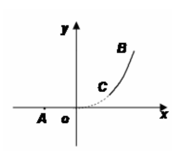
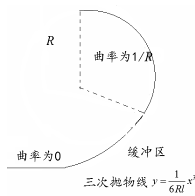
续表

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
	从图上来看，$\Delta\alpha'$ 比 $\Delta\alpha$ 大，而直觉告诉我们弧 $\overset{\frown}{M_2M_3}$ 弯曲得厉害，从而切线转角越大，弧弯曲得越厉害。由此得到结论，弯曲程度与切线转角成正比。 其次，如图 2 所示，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弧 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的切线的转角都是 $\Delta\alpha$，但是弧长较短的弯曲得厉害。从而得出弯曲程度与弧长 Δs 成反比。  图 1  图 2 综上，曲线的弯曲程度可以用 $\dfrac{\lvert\Delta\alpha\rvert}{\lvert\Delta s\rvert}$ 来描述。回想物体在做变速直线运动时，描述物体的快慢程度用路程和时间的比值来描述，而路程和时间的比值就是平均速率（不考虑方向），这里要解决曲线的弯曲程度，可以类似的引入平均曲率的概念，很自然地引入下面的定义。	画曲线弯曲程度的方法。 联想熟知的知识进行对比	建模的能力。 让学生理解数学概念不是突然产生了，而是由生活经验提炼出来的。抓事物的本质	
曲率的概念	**二、曲率的概念**  图 3 如图 3 所示，在光滑的曲线上自点 M 开始取弧段到 N，其长为 Δs，对应切线转角为 $\Delta\alpha$。 **定义 1** 弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的切线转角 $\Delta\alpha$ 与该弧长 Δs 之比的绝对值 $\left\lvert\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\rvert$ 称为该弧的平均曲率，记为 $\overline{K}$，即 $$\overline{K}=\left\lvert\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\rvert$$ 注意：这里之所以取绝对值，是因为 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 有正有负，但我们只考虑曲线的弯曲程度，而弯曲程度是	由上面的分析很自然地引出需要用的数学概念，从而提出曲率的概念。	通过概念的提出，让学生理解并感受数学的严密语言及严谨的科学观。	5 分钟

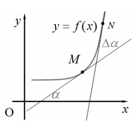
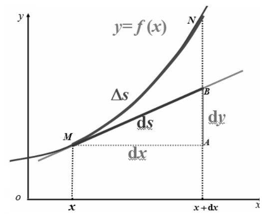
续表

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
	不必计较正负的。 然而平均曲率仅表示了某段曲线上弯曲程度的平均值，要精确地描绘弯曲程度还需要引入曲线在一点处的曲率的概念。 **定义 2** 当点 N 沿曲线 L 趋向于 M 点时（$\Delta s\to 0$），若弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的平均曲率的极限称为曲线 L 在点 M 处的曲率，记为 K，即 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|$。 如果 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ 存在，曲率也写为 $K=\left\|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right\|$。 例如，对于直线 $y=ax+b$，如图 4 所示，其上任意一点处的切线都是其本身，故 $\Delta\alpha=0$，从而 $\overline{K}=\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|=\left\|\dfrac{0}{\Delta s}\right\|=0$，$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|=0$。 说明直线上任意一点的曲率为零。从而说明直线是不弯曲的。  图 4  图 5 再如，半径为 R 的圆，如图 5 所示，其上有任意两点 M 和 N，切线转角为 $\Delta\alpha$，所以，圆心角也为 $\Delta\alpha$，弧长 $\Delta s=R\Delta\alpha$，$\overline{K}=\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|=\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}\right\|=\dfrac{1}{R}$，$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|=\dfrac{1}{R}$。 说明：圆上的点处的曲率处处相同，均为 $\dfrac{1}{R}$。同时，半径 R 越小,曲率越大，即弯曲的厉害。 半径 R 越大，曲率越小，即弯曲的越弱	通过设问，复习前面用过的求瞬时速度问题，通过平均值取极限的方式进行。 通过两个简单实例体会曲率的概念的严密性	让学生理解为什么不用平均曲率，而要引入下面的曲率概念。 让学生理解曲率概念的合理性，数学来源于生活	
应用案例	【应用案例】铁轨的弯道分析 众所周知，铁轨的弯道通常设计成外轨比内轨高，其实弯道铺设时还要符合曲率的要求，如图 6 所示，火车由直线轨道转入曲线轨道 CB 时，中间需用曲线 OC 连接。曲线 OC 的连接应保证火车的安全运行，OC 在衔接点 O 处，既应与 AO 相切，又应使其曲率	此处，通过设问的方式，让大家知道火车铁轨弯道的设计。	通过设问提高学生课堂上学习兴趣，引导学生思考加上教师的引导来完成。	2 分钟

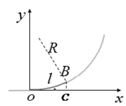
续表

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
	为零，即与直线轨道 AO 的曲率相同；在衔接点 C 处，也应与 C 点相切，且与 CB 在 C 处的曲率相同。从而使曲线 OC 在衔接点处不仅切线连续变化，而且在这两点的曲率也连续变化，这样火车在转弯时向心力连续变化，从而不会发生急剧震动。 人们通常取 OC 为三次抛物线 $y=ax^3$，而不采用圆弧，显然曲线 $y=ax^3$ 可以保证在 $(0,0)$ 处的曲率为零。  图 6  图 7 而且可以选择适当的 a，使 OC 在 C 处的曲率与 CB 在 B 处曲率相同，从而保证达到上述目的。我国铁路常用三次抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓冲曲线（如图 7 所示），其中 R 是圆弧弯道的半径，l 是缓冲曲线的长度，且 $l \ll R$。 **思考题**：为什么不以圆弧为过渡曲线呢？ 答　这是因为圆弧上每点的曲率一样，且不会为零，因此火车经过节点时向心力发生突变，从而产生剧烈震动，这是不符合安全要求的。 **思考题**：对于上面的缓冲曲线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$，如何求它的曲率呢？ 这就是将要解决的下一个问题	此处，通过动画演示的方式，让大家深刻感知曲率在轨道设计中的应用。 此处利用设置思考题，让学生意犹未尽，课下再思考。 承上启下	培养学生解决问题的能力。 培养学生发现问题的能力。通过数学思维提高自己的能力	
曲率的计算	**三、曲率的计算** 曲率的定义 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|$，但是我们计算时用它就比较麻烦，所以我们要寻求别的方法。 在 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ 存在的情况下，曲率 $K=\left\|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right\|$，将 x 视为参数，则 $K=\left\|\dfrac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}\right\|$。所以我们只要把 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ 求出来就可以算了。设曲线 $y=f(x)$ 二阶可导。	复习所学过的导数定义，为什么要引入下面的计算。	让学生理解为什么抛开定义要寻求更简单的方法。	8 分钟

续表

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
	1.求 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$ 如图 8 所示，由导数的几何意义得到 M 处的切线斜率为 $y'=\tan\alpha$（设 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）。   图 8　　　图 9 得 $\alpha=\arctan y'$，$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{1+y'^2}\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y''}{1+y'^2}$， 从而 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y''}{1+y'^2}$。 2.求 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ $\mathrm{d}s$ 为弧微分。如图 9 所示，$\mathrm{d}s$ 与 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 构成了微分三角形，满足勾股定理，$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，又 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$。 综上所述， $K=\left\|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right\|=\left\|\dfrac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right\|=\dfrac{\|y''\|}{(1+y'^2)\cdot\sqrt{1+y'^2}}$ $=\dfrac{\|y''\|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$。 这就是曲线 $y=f(x)$ 上任意点处的曲率计算公式。` **【例 1】** 我国铁路常用三次抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$ 作缓冲曲线，其中 R 是圆弧弯道的半径，l 是缓冲曲线的长度，且 $l\ll R$，如图 10 所示。试从曲率角度分析为什么三次抛物线可以起到缓冲作用。 解 $y'=\dfrac{1}{2Rl}x^2,\ y''=\dfrac{1}{Rl}x$ $K=\dfrac{\|y''\|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{8R^2l^2x}{(4R^2l^2+x^4)^{\frac{3}{2}}}$，	联系前面的导数的几何意义。 联系前面的微分复习弧微分，动画演示。 通过验算，得到曲率计算公式	得到需要的结果。 复习需要用的结果。 让学生明白计算公式的由来，而不觉得很突兀。 回归到前面所讲的案例，解决其中没有解决的内容，为什么曲率会将三次抛物线做缓冲曲线	

续表

教学进程	教学内容	教学方式	设计意图	时间分配
	它是 x 的连续函数。且 $K\|_{x=0}=0$。  图 10 实际使用的弯道，一般 $\frac{l}{R}$ 较小，而且 $\overset{\frown}{OB}$ 的长度 l 和直线段 OC 的长度 x 也比较接近，即 $x\approx l$。代入上式 $K\|_{x=l}\approx\frac{8R^2l^3}{(4R^2l^2+l^4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R}\frac{1}{(1+\frac{l^2}{4R^2})^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{1}{R}$。 因此，缓冲曲线的曲率由 0 连续地变化到 $\frac{1}{R}$，起了缓冲作用。故三次抛物线可以作为缓冲曲线。 **思考题：**开始引入的西班牙火车脱轨事件，不同的弯道有不同的限速，如何根据弯道来设计相应的速度呢？ 解释这些问题还需要物理的知识，请大家回去查阅相关的资料。			
小结	曲率描述平面曲线 $y=f(x)$ 的弯曲程度。 1.曲率的概念 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right\|$ 2.曲率的计算公式 $K=\frac{\|y''\|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$	通过黑板上的已有板书进行总结	通过小结让学生对本节的内容一目了然，了解需要掌握的知识	1分钟

八、板书设计

§3.7 平面曲线的曲率

一、问题的提出　　二、曲率的概念　　三、曲率计算

弯曲程度　　$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$　　公式　$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

九、课后作业

教材: P177：1，7

十、教材及参考书目

- 教材

同济大学数学系.高等数学(第六版) (上册) [M]．北京：高等教育出版社，2007.

- 参考书目

[1]吴赣昌.高等数学（第三版）（上册）[M]．北京：中国人民大学出版社，2009.

[2]复旦大学数学系.数学分析（第二版）（上册）[M]，北京：高等教育出版社，2008.

十一、网络资源

- 爱课程网　http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2181.html

（同济大学数学系教授 主讲）

致谢

关于本内容的教学设计，参考了很多教学资源，比如国内外出版的《高等数学》和《数学分析》教材、各种发表的关于曲率的研究论文、各种关于火车弯道设计的论文、百度文库中的一些资源等，在此向作者表示感谢！

开普勒的困惑——旋转体体积的计算

梁　超
中央财经大学

作 品 标 题：开普勒的困惑——旋转体体积的计算
所 属 课 程：《高等数学》
相关知识点：旋转体体积的计算
知识点编码：060203
授 课 对 象：大学一年级学生，第一学期
授 课 时 长：20 分钟
参 考 文 献：[1] 同济大学．高等数学[M]．北京：高等教育出版社．
[2] Larson Edwards. Calculus of a Single Variable：Early Transcendental Functions(5th,2011)[M].

教学背景

在牛顿和莱布尼兹正式发明微积分方法之前，许多数学家的工作已经显示着微积分的萌芽，比如开普勒的旋转体体积计算。1613 年开普勒在自己的婚宴上，就葡萄酒的定价问题提出质疑。他认为葡萄酒商仅用一根从桶腰处插入酒桶的棍的长度给出定价是不合理的。这个质疑引发了他对旋转体体积计算方法的研究的兴趣。他发现可以用无数个同维数无限小的和确定旋转体的体积，并于 1615 年把这个想法发表于《测量酒桶的新立体几何》一文中。比如，圆锥的体积可以由无数个加厚的圆盘体积之和给出。他的这个想法和我国古代杰出数学家刘徽的“割圆术”思想非常相似，都是无穷小求和的思想。

授课的对象是大学一年级的学生。学生已经掌握了定积分的定义和计算方法，以及微元法求平面区域面积的方法。另外，对无穷积分有一定的了解。

教学目标

了解旋转体的定义，掌握并会灵活运用两种计算旋转体体积的方法：圆盘法和柱壳法。其次，对旋转体体积计算方法这一问题的提出、对微元法、帕普斯几何中心定理（古鲁金定理），以及油漆匠悖论有一定的认识。

教学内容

旋转体体积计算方法：

①圆盘法：在转轴方向任意选取一个小增量，做垂直于轴方向的矩形面积微元，绕轴旋转一周产生加厚的圆盘，以其体积为整个旋转体的体积微元，积分即得旋转体的体积。

②柱壳法：垂直于转轴方向任意选取一个小增量，做平行于轴方向的矩形面积微元，绕轴旋转一周产生很薄的柱壳，以其体积为整个旋转体的体积微元，积分即得旋转体的体积。

重点难点分析

本节教学重点是旋转体体积两种计算方法的学习和掌握。难点是选取合适的面积微元，以确定体积微元的体积，进而确定被积函数，积分得到旋转体体积。

教学方法和过程

教学方法以讲授为主，结合电子教案和白板板书。

首先，介绍旋转体概念。

旋转体是一条曲线或一块有限区域围绕某一根直线轴旋转一周得到的图形。比如我们常见的轮轴、碗、酒桶和甜甜圈。在生产生活中，我们经常需要考虑下面的问题：需要多少材料才能铸造出一个这样的轮轴？这个碗能盛多少水？这个酒桶能容纳多少葡萄酒？怎样调整甜甜圈的松软度和酥脆度之比？这些问题其实都是关于体积的问题，即旋转体的体积问题。

其次，以开普勒的困惑作为问题的引入。

众所周知，约翰尼斯・开普勒是德国杰出的天文学家，他发现了行星运动的三大定律。其实，开普勒对数学学科也做出了重要贡献。1613年，开普勒在奥地利的林茨举行婚宴。他买了一桶葡萄酒宴请宾朋。但是就这桶酒的价格问题，他提出了质疑。一般，奥地利的葡萄酒商是这样定价的：把酒桶放倒下来，从顶端的小孔 a 处插入一根小棍，直到棍子前端抵到桶盖边缘 z 处。由棍子插入桶中部分的长度，确定酒桶的体积和这桶酒的价格。这个方法使开普勒很恼火。一个瘦长的酒桶和一个稍矮点，但是胖很多的酒桶，在这种测量方式下，可以有相同的价格。但显然胖酒桶中装的酒更多。所以，他开始思考酒桶的体积问题，也就是旋转体的体积计算方法。1615 年，开普勒发表《测量酒桶的新立体几何》一文，提出用无数个同维数的无限小元素之和来确定旋转体的体积的想法。例如，他把圆锥看做极薄的圆盘之和，并由此计算体积。这一思想和我国古代数学家刘徽“割圆术”中的想法非常相似，都是无穷小求和的思想。

讲授第一种计算旋转体体积的方法——圆盘法。

给定区间[a，b]上的一个函数 $f(x)$，考察它与轴之间的区域。任取一个 x 方向的增量 Δx，可以得到一块高为 $f(x)$，宽为 Δx 的面积微元。当这个区域绕轴一周后，面积微元生成一个圆柱形体积微元。因此，旋转体的体积微元所围体积为 $\pi f^2(x)\Delta x$。当把区间[a，b]细分后，就可以用一系列这种圆柱体之和来近似表示整个旋转体。因此，旋转体的体积近似为这些圆柱体体积之和。当进一步细分区间[a,b]，这种近似程度更好，误差更小。因此，旋转体的体积就等于这些圆柱体体积之和在分割细度趋于 0 时的极限，即函数 $\pi f^2(x)$ 在[a,b]上关于变量 x 的定积分

$\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。注意，刚刚讨论的圆柱体微元，其柱高是$\Delta x$，所以，它更像一个加厚的圆盘。因此，把这种计算旋转体体积的方法称为“圆盘法”。

例 1.求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴旋转一周所围成的旋转体的体积。

注意：这个椭圆绕y轴旋转得到的旋转椭球体，和绕x轴得到的旋转椭球体是不同的。前者在z方向的半轴长是a，而后者在z方向的半轴长是b。

一般情况，考察的曲线方程为$x=f^{-1}(y)$。在y方向任取一个增量Δy，以$f^{-1}(y)$为长，得到一块面积微元，绕 y 轴旋转后，得到的体积微元是一个底圆半径为$f^{-1}(y)$，高为Δy的圆柱体。故体积微元为$\pi[f^{-1}(y)]^2\Delta y$。同样我们细分区间[c,d]之后，就能用一系列这种圆柱体之和近似表示整个旋转体。不断加细对[c,d]的分割，这种近似越来越好。因此，我们知道旋转体的体积为$\pi[f^{-1}(y)]^2$在[c,d]上的定积分$\pi\int_c^d [f^{-1}(y)]^2\mathrm{d}y$。

例 2.求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$y$轴旋转一周所围成的旋转体的体积。

例 3.求由圆$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$绕$x$轴旋转一周所得环状立体的体积。

此环状立体即为甜甜圈。根据圆盘法，先在x轴方向任取一个增量Δx，得到一块面积微元。但它绕x轴一周后得到的是一个“空心”圆柱。其体积可以看做大圆柱体积减去小圆柱体积。大圆柱的底圆半径由上半圆周$f_1(x)$给出，小圆柱的底圆半径由下半圆周$f_2(x)$给出。因此，体积微元为$\pi[f_1^2(x)-f_2^2(x)]\Delta x$。

讲授第二种计算旋转体体积的方法——柱壳法。

换一种思路看例 3。如果“横”着取面积微元，即在y方向取一个增量Δy，平行于x轴取面积微元，绕x轴一周后，也得到一个“空心”圆柱，但因Δy很小，所以这个体积微元壁很薄，是一个柱壳。设柱高为h，壁宽为w，小圆柱底圆半径为$y-\frac{w}{2}$，大圆柱底圆半径为$y+\frac{w}{2}$。因此，柱壳的体积为大圆柱体体积减去小圆柱体体积，化简得到体积为$2\pi ywh$。这种取微元求体积的方法称为柱壳法。回到例 3，运用柱壳法同样可以计

算得到甜甜圈的体积为 $2\pi^2r^2R$。

介绍帕普斯几何中心定理（古鲁金定理）。

例 3 的结果可以拆项为 $2\pi R$ 乘以πr^2。注意，πr^2 为圆盘面积，$2\pi R$ 为圆心绕 x 轴一周的路径周长。在古希腊时代的数学家帕普斯和 16 世纪的数学家古鲁金就分别独立证明了一般的结论：一平面图形绕与之内点不交的直线旋转一周所产生的体积，恰为图形面积乘以重心所画圆周的周长。比如三角形绕一条直角边旋转一周，得到一个圆锥。三角形的面积为$\frac{1}{2}rh$，重心的横坐标为$\frac{1}{3}r$，重心绕轴一周的路径长为$\frac{2}{3}\pi r$。所以，由古鲁金定理，这个圆锥的体积为$\frac{1}{2}rh$乘以$\frac{2}{3}\pi r$，即$\frac{1}{3}\pi r^2h$。

开普勒的释然。

开普勒进一步分析发现，如果把酒桶近似看成一个圆柱形，在插入酒桶部分棍长 d 固定不变情况下，当酒桶高度一半 h 与 d 之间满足关系：$3h^2=4d^2$ 时，酒桶体积最大。但是在最大点附近，酒桶体积变化很慢。而奥地利酒桶的造型正好接近这个式子，所以，奥地利葡萄酒商的定价方式是可以接受的。于是，开普勒很高兴地继续他的婚礼。

总结两种计算旋转体体积的方法。

一种是圆盘法。这种方法取微元时是垂直于旋转轴的，微元绕轴一周后产生加厚的圆盘形体积微元，对体积微元求定积分，即为旋转体的体积。另一种方法是柱壳法。这时选取的微元是平行于旋转轴的。微元绕轴一周产生柱壳形体积微元，对体积微元求定积分，即得到旋转体的体积。同学们在以后的学习中，可以根据具体题目灵活选择这两种方法之一解决问题。

最后，练习及对下节课内容的铺垫。

例 4.求曲线 $y=\frac{1}{x}, x\in[1,a]$ 与直线 $x=1, x=a$ 和 x 轴所围区域绕 x 轴一周后得到的立体体积。

分析例 4 的结果发现，如果曲线 $y = \frac{1}{x}, x \in [1, a]$ 向右段无限延伸，即 a 趋于正无穷，这个无界区域绕 x 轴一周所围成的旋转体却有有限体积 π。这个结果是 1641 年由伽利略的学生托利拆里证明的，所以，这个

图形称为**托利拆里小号**。预告下节课将进一步证明这个小号形状的物体有无限的侧面积。也就是说这是一个具有无限侧面积，但有限体积的图形，这正是**油漆匠悖论**描述的情形：从内部灌满只需要有限的油漆，但是在外表面刷一层无论多薄的油漆层，却需要无限多的油漆才能完成。

教学总结

通过本节课的学习，学生将掌握旋转体的概念以及旋转体体积计算的两种方法。另外，了解旋转体体积计算这一问题提出的历史背景，也更深入理解微元法和极限思想。学生对帕普斯几何中心定理（古鲁金定理），以及油漆匠悖论也将有一定的认知。

旋转曲面及其方程

夏　霞
中央民族大学

作 品 标 题：旋转曲面及其方程
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：旋转曲面及其方程
知识点编码：080803
授 课 对 象：非数学专业理工科本科一年级学生

1. 教学背景

（1）学生的知识结构。本课程的教学对象已经系统地完成了《高等数学》上册的学习，特别是在《定积分的应用》一章中学习了一些旋转面的侧面积和旋转体的体积公式推导，对旋转面的形成过程有基本的认识。本节课用于旋转的平面曲线为直线、双曲线，学生早在高中阶段就作过细致地学习，对这些曲线的方程及相关性质记忆比较深刻，为本节课研究由平面曲线的旋转奠定了良好的基础。

（2）学生的心理状态。旋转曲面包括圆柱面、圆锥面、旋转双曲面、旋转抛物面、旋转椭球面等，类型多性质复杂，且形成过程都为动态的旋转过程。空间想象能力较弱的学生对这部分的学习会感觉很抽象，非常困难。此外，通常学生拥有的几何学习的经验来源于中学阶段对几何体的图形、性质和公式简单且机械的记忆，学生将中学学习的经验移植到高等数学解析几何的学习中会产生一种错觉，认为这些曲面只存在于

书本学习，距离自己的生活很远，甚至是遥不可及的，从而感到力不从心，学习枯燥乏味。

鉴于以上学生在学习旋转曲面及其方程一节时常见的心理状态，授课教师可采取以下措施：收集大量的课程素材，以生动的实例和精简的分析为立足点，引导学生思考旋转曲面在生活中能有如此广泛应用的内在原因；采用大量动画演示旋转曲面的形成过程；课堂现场手工制作一些简单的旋转曲面，活跃课堂气氛的同时也让学生认识到旋转曲面在生活中有大量的应用，让学生感觉书本上抽象的几何体距离生活并不遥远，能激发学生的学习兴趣，也能培养学生平时仔细观察生活并提出问题解决问题的习惯。

2. 教学目标

掌握坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转一周所成旋转曲面的方程，会用旋转曲面的方程求圆锥面、旋转双曲面的方程。能够将实际生活中一些建筑外形、物品形态等问题抽象成旋转曲面的数学模型，会用空间解析几何的方法研究曲面方程及相关性质，提高将理论知识应用于实际生活的能力。

3. 教学内容

旋转曲面的形成过程及方程、在圆锥面及旋转双曲面的应用例题。

4. 重点难点分析

重点：引导学生想象由静态的平面曲线到空间曲面的动态演化过程，在形成轨迹的旋转过程中建立坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转一周所得的旋转曲面的方程。

难点：旋转曲面的方程是以 yOz 坐标面上的曲线绕 z 轴旋转一周得到的曲面为例推导的，对任意坐标面上的曲线，在已知曲线方程和旋转轴的条件下，如何做到举一反三，让学生能熟练的求出相应旋转曲面的

方程是相对困难的。

5. 教学方法和过程

教学方法

本节课程主要采用比照教学法和实践教学法并注重不同学科间的交叉互动，通过讲授和分析，并结合具体的实例，使学生理解旋转曲面的形成过程，掌握以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程。

（1）比照教学法。相交直线旋转形成圆锥面、双曲线旋转形成旋转双曲面，将这些曲面的形成过程作比较，可以让学生深刻认识不同的平面曲线旋转形成不同的旋转曲面。在介绍旋转双曲面时，充分采用比照法，将双曲线的不同旋转过程作对比，让学生看到形成曲面个数的不同从而对单叶和双叶有初步的认识，同时将两种双曲面的方程加以比较使学生从理论上看到单叶和双叶双曲面是不同的曲面。

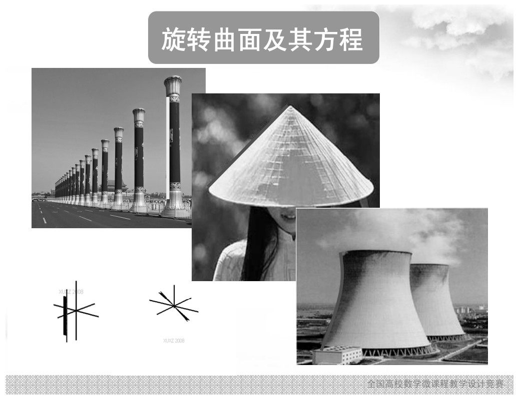
（2）实践教学法。除了在理论上从方程出发认识旋转曲面的性质外，还现场手工制作一些简单的旋转曲面，如用扇形纸卷成圆锥面、用竹签编扎旋转单叶双曲面。鼓励学生发挥想象力，培养学生的创新精神和实践能力，让学生深切地体会到数学与实际生活是紧密结合的。

（3）注重不同学科间的交叉互动。简单说明自然堆积的沙堆、粮仓等都是圆锥面的原因；广州电视塔充分利用旋转单叶双曲面直纹面特性可以增加建筑稳定性的受力原理；运用旋转双叶双曲面具有双曲线两个焦点的特征制作卡塞格伦天线的物理原理，激发学生学习物理、建筑等相关课程的兴趣。

教学过程

（1）引入。

观看三张图片：国庆 60 周年天安门广场矗立的 56 根大红的民族团结柱、京族人民用竹子编制的斗笠、火力发电厂和核能发电厂的自然通风冷却塔。引导学生观察这些图片中的物体侧面的共同特征，引出旋转曲面的定义。



（2）旋转曲面的定义和方程。

所谓旋转曲面，就是一条平面曲线绕其平面上另一条定直线旋转一周所成的曲面，这条定直线称为旋转轴，旋转曲线称为母线。

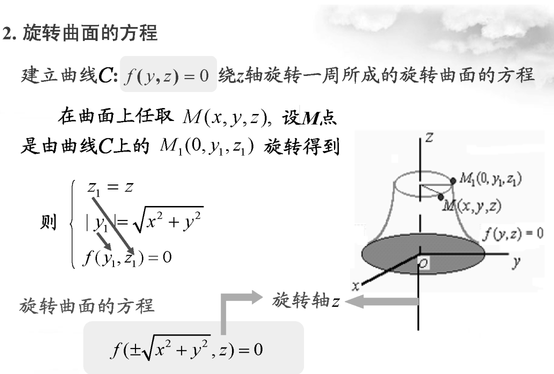
已知 yOz 坐标面曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$，建立曲线 C 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程。在曲面上任取一点 $M(x,y,z)$，设 M 点是由曲线 $\boldsymbol{C}$ 上的 $M_1(0,y_1,z_1)$ 点旋转得到的，则 M_1 和 M 在平行于 xOy 坐标面的平面上，即 $z_1=z$；M_1 和 M 到圆心的距离相等，也就是 $|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$；将 M_1 点坐标代入曲线 C 的方程即得这种情形下的旋转曲面的方程：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

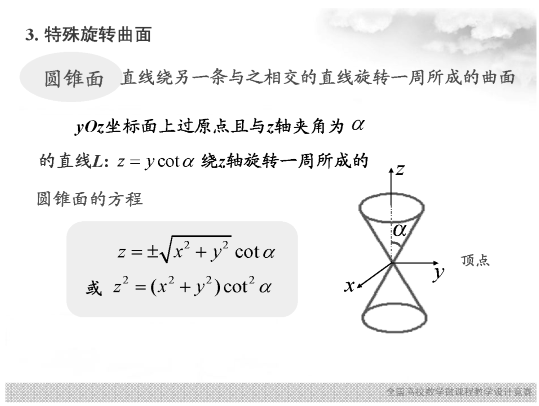
特征：旋转曲面的方程即是在曲线 C 的方程中保持旋转轴 z 不动，将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 即可。

同理，曲线 C：$f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

旋转曲面在我们的生活中比比皆是，形状千资百态。接下来我们看几种特殊的旋转曲面。



（3）特殊旋转曲面举例。



圆锥面　当母线为一条和旋转轴相交的直线时，称这条直线旋转一周得到的旋转曲面为圆锥面。两直线的交点称为圆锥面的顶点，夹角称为圆锥面的半顶角。

设 yOz 面上过原点且与 z 轴夹角为 α 的直线方程为 $z=y\cot\alpha$，则直线绕 z 轴旋转一周所成圆锥面的方程为 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$，可将方程两边平方以去掉正负号得圆锥面方程为 $z^2=(x^2+y^2)\cot^2\alpha$

圆锥面在自然界中真实的存在，你留意过吗？主干直立的大树呈现出圆锥面的形态，海边玩过沙的同学一定堆过圆锥形的沙堆，农村的同学一定见过通过传送带堆积的粮食侧面也是圆锥面。圆锥顶部尖状的形态也让它广泛存在于我们的生活中，手中握的笔尖，吃的甜筒冰淇淋，甚至导弹头也设计成圆锥形用以减小空气阻力。

旋转双曲面 yOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$，

当双曲线绕 z 轴旋转一周时得到一个旋转曲面，曲面的方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$。

让双曲线绕 y 轴旋转一周，得到了两个曲面。此时曲面的方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2+z^2}{b^2}=1$。

为了区分这两种情形，称双曲线绕虚轴旋转一周得到的一个曲面为旋转单叶双曲面，绕实轴旋转一周得到的两个曲面为旋转双叶双曲面，其中单叶和双叶是指得到的曲面是一个还是两个。

在引入部分展示的发电厂的冷却塔采用的就是旋转单叶双曲面的外形设计，物理研究发现旋转单叶双曲面的造型能大大提高冷却的效率。除此之外，广州为举办 2010 年亚运会建造的电视塔也是旋转单叶双曲面在建筑上的又一个经典应用，在这里充分展现了旋转单叶双曲面的另一个几何性质，直纹面的特性，在建筑上能保持良好的稳定性。

双叶双曲面能体现出双曲线所特有的性质。双曲线有两个焦点，相应的旋转双叶双曲面每一只各有一个焦点，可应用于信号的反射上。通信上卡塞格伦天线利用了这个性质，将双叶双曲面的一只曲面做副反射镜，使天线的结构较为紧凑，制作起来比较方便，还能使各点反射出的信号更为稳定。

（4）实践制作。

将一张扇形的纸卷起来能做出圆锥面。用烤串的竹签斜向交叉编织成的模型，把前后两边合拢起来就做成了旋转单叶双曲面！

（5）小结。

总结坐标面曲线绕坐标轴旋转一周所成旋转曲面的方程，并提供维基百科中关于旋转曲面的图形、知识及相关应用的网址，让学有余力的同学在课后可以更为深入地学习。

旋转曲面：http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_of_revolution

圆锥面：http://en.wikipedia.org/wiki/Conical_surface

旋转双曲面：http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_hyperboloid_structures

6. 教学总结

本节课主要讲授旋转曲面的定义，推导坐标面曲线绕坐标轴旋转一周所成旋转曲面的方程，同时举例圆锥面及旋转双曲面学习旋转曲面方程的求解过程。

本节课有以下创新点：

（1）以理论联系实际的思想为指导。本节课所使用的大量图片能使学生深切地体会到高等数学与日常生活的紧密联系，让抽象的理论得以回归现实生活，给学生以直观的认识，从而激发学生对数学的学习兴趣。

（2）制作动画并辅以教具讲解以增强视觉感受。整节课大量应用动画演示，如动画演示圆锥面的旋转过程可以让学生直观地认识旋转的意义，再动态演示双曲线的两种不同旋转方向，可以加深学生对单叶和双叶的理解。动画演示克服了立体图形在平面展示中的不足，提升学生空间想象的能力。

（3）注重数学与相关学科的联系与渗透。将抽象的旋转曲面与实际建筑如广州电视塔、冷却塔等相结合，能让学生感知到建筑中的数学美。对冷却塔利用旋转单叶双曲面的外形特征提高冷却效率作物理解释，卫星天线将旋转双叶双曲面和旋转抛物面相结合可以提高信号的传输功能，能让学生体会数学在物理学科中的广泛应用。

直角坐标系下二重积分

刘　玲
北京信息科技大学

作 品 标 题：直角坐标系下二重积分的计算
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：X 型积分区域上
化二重积分为二次积分
知识点编码：100201
授 课 对 象：理工科大一年级学生
授 课 时 长：15 分钟
参 考 文 献：同济大学. 高等数学[M]. 第七版下册. 北京：高等教育出版社.

教学背景

二重积分的概念和计算是多元函数积分学的重要部分，在几何、物理、力学等方面有着重要的应用。计算二重积分，首先要将其化为二次单积分，简称为二次积分或累次积分，这是计算二重积分的基本途径. 如何化为二次积分，如何让计算过程更简单，需要掌握一定的方法和技巧。

教学目标

熟练掌握 X 型积分区域上化二重积分为二次积分并计算的方法。

教学内容

利用二重积分的几何意义将 X 型积分域上的二重积分化为二次积分；强调化二重积分为二次积分的关键是定限；举例说明二重积分的计算如何通过两个单积分的计算（即**二次积分**）来实现及易出现的错误；小结二重积分化为二次积分并计算的步骤及需要注意的事项。

教学方法和过程

一、问题的引入（复习以及知识准备）（4 分钟）

1．回顾二重积分的定义

设 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的有界函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

按照定义来计算二重积分非常烦琐，仅对于少数及其简单的被积函数与积分域是可行的。

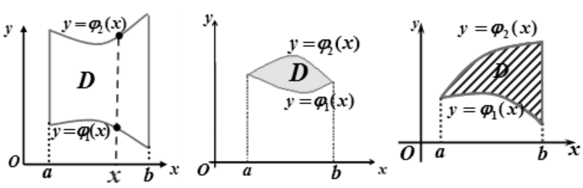
二重积分计算公式的推导思路：借助于几何工具（几何意义），将其化为二次单积分。

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的结果由两个因素决定：①被积函数；②积分区域。为了讨论的简洁，先从简单情形入手，也即先作两点假设。

2．两条假设

（1）在积分区域 D 上 $f(x,y)\geqslant 0$ 。

（2）积分域 D 形为如下图所示的 X 型区域。



区域 D 可表示为 $D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\\ a\leqslant x\leqslant b\end{matrix}\right\}$，其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C[a,b]$,

称为 **X 型区域**（注：边界曲线在 D 内部无交点）。

X 型区域的特点：平行于 y 轴且穿过区域的直线与区域边界的交点不多于两个。

3．回顾二重积分的几何意义

设 $f(x,y)\geqslant 0$，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 V，即 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V$ 。

二、X 型积分区域上二重积分的计算

1．化二重积分为二次积分计算的公式（4 分钟）

应用计算“平行截面面积为已知的立体体积”的方法，求 V，如图 1 所示。

在区间 $[a,b]$ 上任意取一个点 x_0，过此点作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$，这个平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底，曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形，如图 2 所示，其面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

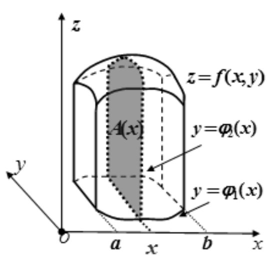


图 1

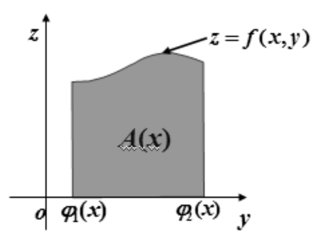


图 2

一般地，过区间 $[a,b]$上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

利用计算平行截面面积为已知的立体之体积的方法，该曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

从而有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{1}$$

上述积分称为先对 y，后对 x 的二次积分，即先把 x 看做常数，$f(x,y)$ 只看做 y 的函数，对 $f(x,y)$ 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分，然后把所得的结果（它是 x 的函数）再对 x 从 a 到 b 计算定积分。

这个先对 y，后对 x 的二次积分也常记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{1'}$$

2．两点说明及思路分析（2 分钟）

（1）关于被积函数：在上述讨论中，假定 $f(x,y)\geqslant 0$，利用二重积分的几何意义，导出了二重积分的计算公式（1）。但实际上，公式（1）并不受此条件限制，对一般的 $f(x,y)$（在 D 上可积），公式（1）总是成立的。

（2）关于积分域：公式（1）适用于 X 型区域，其他类型的区域如图 3 和图 4 所示：

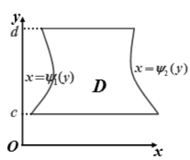


图 3

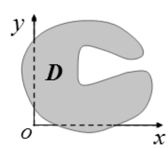


图 4

思考：如果积分区域不是 X 型区域，则如何计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$？(后续知识点)

注意：公式 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 是先 y 后 x 的积分序，即先把 x 看做常数，$f(x,y)$ 只看做 y 的函数，对 $f(x,y)$ 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分，再把所得结果（是 x 的函数）对 x 从 a 到 b 计算定积分。

3．例题及易出现的问题（4 分钟）

例 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 为由直线 $y=x$ 、$x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 所围成的闭区域。

解 画出积分区域 D 的草图，并求得 D 的三条边界曲线的交点，如图 5 所示。显而易见 D 为 X 型区域。根据前面所给方法，将所给积分化为二次积分：

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2 (x^3-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

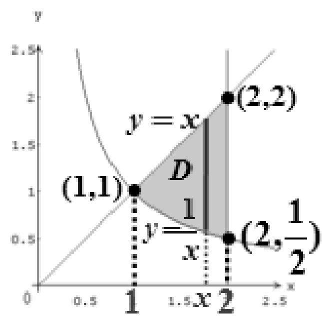


图 5

注意：$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\neq\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

因为$1\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2$ ，单独看没有问题，但合起来并不是 D。

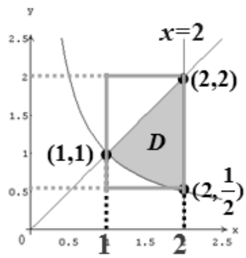


图 6

三、小结（1 分钟）

X 型积分区域上化二重积分为二次积分计算的公式为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

使用时应注意：二重积分化为二次积分计算的步骤如下：

①画域；②定限；③计算先 y 后 x 的二次积分，其中**定限是关键。**

重点、难点分析：利用直角坐标计算二重积分、化二重积分为二次积分的定限问题。

这里，我们介绍确定二次积分限的方法 ——几何法。

画出积分区域 D 的图形（假设的图形如图 7 所示）：

首先，将区域投影到 x 轴上（即过区域 D 的左右两端向 x 轴作垂线），得区间 $[a,b]$，则得关于 x 积分的积分限为从 a 到 b；然后，在区间 $[a,b]$ 内任选一点 x，过 x 作平行于 y 轴的直线穿过积分域 D，穿入时经过的曲线为 $y=\varphi_1(x)$，穿出时经过的曲线为 $y=\varphi_2(x)$，则关于 y 积分的积分限为从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$。从而有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 。

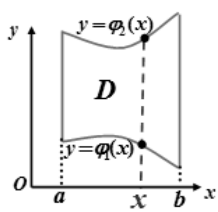


图 7

Y 型积分区域上化二重积分为二次积分

杨丽娜
中国石油大学（北京）

作 品 标 题：Y 型积分区域上化二重积分为二次积分
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：Y 型积分区域上化二重积分为二次积分
知识点编码：100202
授 课 对 象：本科一年级
授 课 时 长：13.5 分钟
参 考 文 献：
[1] 田秀恭.《高等数学》图形演示系统，CAI 课件[M]. 北京：高等教育出版社.
[2] 曹才翰. 曹才翰数学教育文选[M]. 北京：人民教育出版社，2005, 10.
[3] 陈文灯. 高等数学复习指导——思路方法技巧（下册）[M]. 北京：北京理工大学出版社，1996, 6.

一、教学内容分析

本节课所介绍的 Y 型积分区域上化二重积分为二次积分，在第十章中起着举足轻重的作用，是学习二重积分的基础，只有把 X、Y 型区域上化二重积分为二次积分的问题学习扎实了，才能处理未来各种积分区域上化二重积分为二次积分，包括非 X 非 Y 型的积分区域；本次课的内容同时也是计算三重积分和曲面积分计算的基础，所以，在多元积分学

中直角坐标系下二重积分的计算这一知识点是核心和基础，要重点讲解。

二、学生情况分析

大学一年级学生在同济六版的《高等数学》上册中掌握了一元函数的定积分计算，有一定的积分计算基础，但学生对空间图形缺乏想象能力，因此，有必要结合空间图形讲解曲顶柱体体积的求解方法。

三、教学目标

一堂课的成功与否，首先要合理地制定教学目标。而教学目标制定与以下三个方面的内容相关：①与教学内容在教材中的地位有关；②与学生目前掌握的知识情况有关；③与授课时间长短相关。结合前面教学内容和学生情况的分析，以及本次授课是微课的特点，本次课教学目标设定为：①理解 Y 型积分区域上化二重积分为二次积分的思想方法；②基本掌握 Y 型积分区域上化二重积分为二次积分的计算方法，并会在实际做题过程中加以应用。

四、教学设计理念

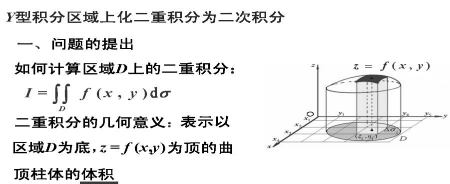
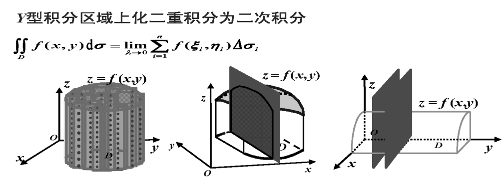
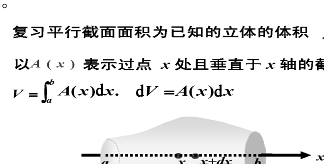
在数学授课过程中，数学思想方法的渗透有时比简单的传授知识更重要。本着这一理念，本次授课采用教师为主导，经过提出问题——分析问题——解决问题——理论联系实际——小结一系列环节的设计，引导学生在观察分析过程中理解元素法思想的核心。教学过程中全程使用 PPT 教学作为教学手段，通过空间图形的动画演示意图培养学生的空间想象能力和对公式的理解能力；通过介绍口诀使抽象方法变得更加具体化。教学过程中努力做到讲解细腻，注重细节。

五、教学重点难点

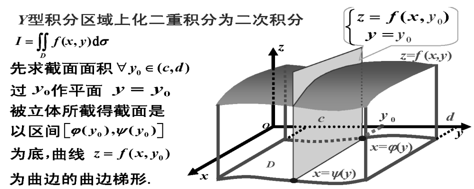
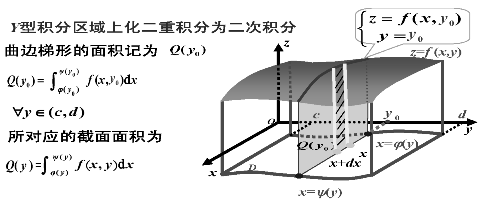
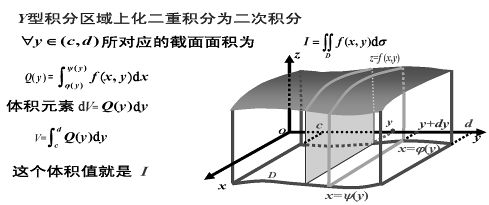
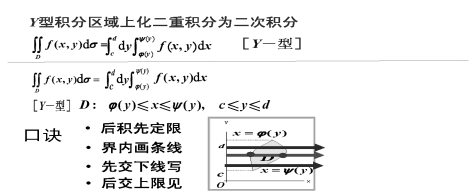
本次课的难点在于用平行截面面积为已知的立体体积的方法化二重积分为二次积分。

本次课的重点是掌握二重积分化二次积分的方法，并在求解具体问题时学会对二次积分正确计算。

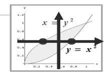
六、教学过程

教学环节	主要内容	设计意图
1.一句话概括本节的重点，接着提出问题（0.5 分钟）	本节的重点是学习 Y 型区域上的二重积分的计算 ，并提问如何计算。 	开门见山，直入主题。引导学生回顾二重积分的几何意义
2.简述求体积的三种方法（1 分钟）	用动画和图片演示求体积的三种方法，使得三种方法出现在同一页上，有利于对比。 	把要学习的二重积分计算法比喻成沿着 Y 轴方向切面包，形象生动，有助于学生理解
3.知识的回顾（1 分钟）	通过动画演示来复习用定积分计算平行截面面积为已知的立体体积。 	通过复习立体体积的求解，为求解曲顶柱体的体积打下基础

续表

教学环节	主要内容	设计意图
4. 采用元素法计算曲顶柱体体积 （5 分钟）	结合动画演示 求截面面积  求立体体积  	通过动画的演示和公式的推导使学生掌握元素法思想的核心
5. 对计算公式进行分析 （1 分钟）	结合动画演示说明内层积分是由线累积到面，外层积分是由面累积到体。  	将数与形结合起来有助于学生理解二次积分的过程
6. 由理论过渡到实践 （2 分钟）	介绍口诀，使得二重积分化为二次积分简单易操作  	口诀朗朗上口，容易被学生理解和接受
7. 给出算例 （2 分钟）	被积函数简单易算	通过做题对知识加以巩固

续表

教学环节	主要内容	设计意图
	例1 求 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由抛物线 $x=y^2$ 和 $y=x^2$ 所围平面闭区域.  解：$\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x+y)\mathrm{d}x$ $=\int_0^1[\frac{x^2}{2}\Big\vert_{y^2}^{\sqrt{y}}+y\,x\,\Big\vert_{y^2}^{\sqrt{y}}]\mathrm{d}y$ $=\int_0^1[\frac{1}{2}(y-y^4)+y(\sqrt{y}-y^2)]\mathrm{d}y=\frac{3}{10}.$ • 后积先定限 • 界内画条线 • 先交下线写 • 后交上限见	
8. 小结（1 分钟）	总结核心内容及重点 **小结** **二重积分计算思想： 利用平行截面面积为已知的立体体积** **二重积分计算步骤： 1. 判断积分区域所属类型** **2. 积分区域类型确定后,由外到内化二重积分为二次积分** **• 后积先定限 界内画条线** **• 先交下线写 后交上限见** **外积分上下限为常数，内层积分上下限是外积分变量的函数**	掌握本节课的要点精华

七、教学小结

本次课以教师为主导，中间设置了两次与学生的问答，增加了互动。在问题的引入部分，用图片加动画的方式使得学生对体积的三种求法一目了然，有助于学生快速理解本次课内容的实质。教师在授课过程中注意数学思想方法的渗透，注重做题的技巧和经验的传授，引导学生在解决问题的过程中培养观察能力、理解能力、空间想象能力和计算能力。本节课的特点是充分发挥了 PPT 演示空间图形动画的功能，拟补了传统板书在直观感、立体感、动感方面的不足，将枯燥的公式和数学理念与图形动画密切结合，直观生动。同时对于语句和各数学符号尽量采用动画输出，给学生预留思考的时间，向板书的效果靠拢。在小结时加入了背景音乐，增添活泼的元素。

曲面面积的典型例题

王冠香
北京大学

作品标题：曲面面积的典型例题
所属课程：高等数学(下)
相关知识点：曲面的面积
知识点编码：100802
授课对象：本科生一年级
授课时长：20 分钟
参考文献：李忠，周建莹. 高等数学（第二版）下册[M]. 北京：北京大学出版社，2009.

教学背景

在学习过了二重积分和三重积分后，学习了重积分的几何应用部分。在计算空间曲面的面积时，学生遇到的主要困难是对空间曲面的结构和形状认识不够，甚至无法想象出所要计算的曲面到底是什么样子，当然也就无从下手。本小节针对该问题，以通常高数教材中都会提及的两根管子、三根管子交接处的面积问题为例，讲解如何想象曲面结构、如何做曲面投影，以及如何计算其后的二重积分。

教学目标

以典型例题的几何图形演示，使学生掌握想象空间曲面的方法、曲

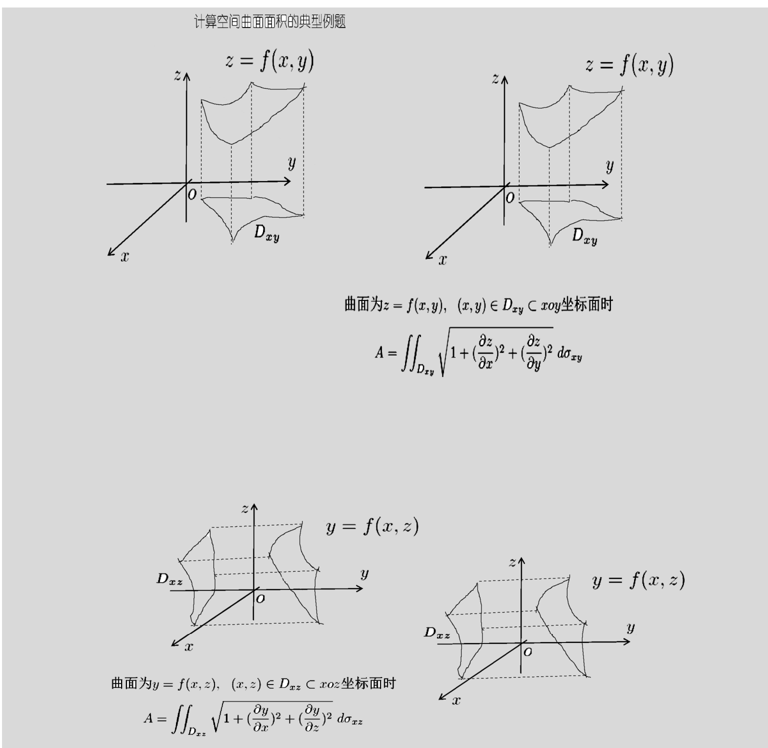
面投影方式，以及二重积分化为累次积分的计算技巧。

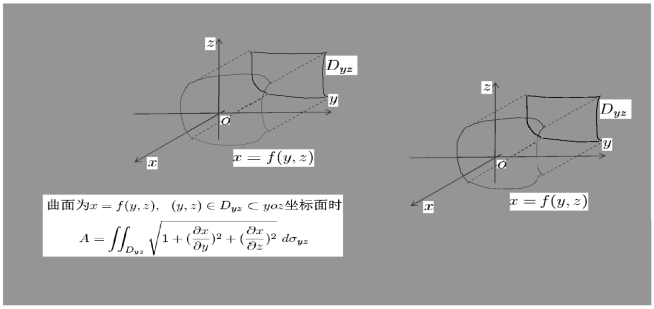
教学难点：如何使学生理解和想象出所给空间曲面的几何结构，以及投影方式和投影区域。

教学方法：主要使用 Matlab 编程来绘制空间曲面，以立体各视角展示空间曲面的集合结构和特征，从而使学生明白曲面的真容极其投影方式和投影结果。

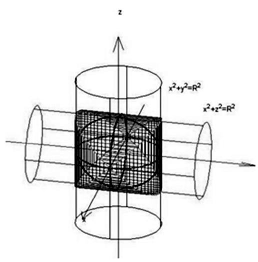
教学结果显示，学生普遍了解了原来没有完整空间几何图形展示时难以想象的曲面结构和特点，明白了曲面投影的一般规律和这些例题中的特殊性。增强了曲面面积计算的能力。

教学过程





例3. 求两柱面$x^2+z^2=R^2$，$x^2+y^2=R^2$含于柱面$z^2+y^2=R^2$中的部分的面积.



方向导数的定义及其应用

许香敏
中国石油大学（北京）

作 品 标 题：方向导数的定义及其应用
所 属 课 程：高等数学
相关知识点：方向导数的定义和实际意义
知识点编码：091101
授 课 对 象：本科一年级学生
授 课 时 长：18 分钟
参 考 文 献：同济大学数学系编著. 高等数学（第六版）[M]. 北京：高等教育出版社，2007.4

教学内容分析

《方向导数的定义》是《高等数学》教材下册第九章第七节的内容。方向导数研究多元函数在任意方向上的变化情况，是偏导数知识的拓广和深入，也是多元函数微分理论到最优化实际问题解决的过渡，可以说架起了多元微分学理论与实际应用的桥梁。方向导数研究函数在任意给定方向上的变化率，是函数定义域内表示函数自变量的点，自给定点处沿给定方向变化时引起的函数值的改变量与移动的距离的比值的极限。与多元函数的偏导数、微分关系密切联系又有本质的区别。正确理解方向导数的概念，把握这一概念的本质，是研究函数性质，指导实际应用的基础。

教学重点

多元函数方向导数的内涵、外延，概念的运用及其与其他概念间的关系。

教学难点

偏导数的几何意义、方向导数与偏导数之间的关系。

教学背景分析

《方向导数的定义》是《高等数学》教材下册第九章第七节前的内容。在本次课之前，学生已经学习了偏导数与多元函数微分的概念与计算方法，对它们有了一定的认识和了解，知道函数的偏导数反映了函数沿着坐标轴方向的变化率，并且通过分析与讨论知道了多元函数的偏导数与微分的关系不同于一元函数导数与微分的关系。对多元函数的连续性、偏导数的存在性和多元函数的可微性等概念之间的关系有了比较清楚的认识。另一方面，由于概念较多，关系复杂，在学习过程中可能也存在一些困难，函数沿着其他方向变化率到底如何定义，它与偏导数之间有什么联系与区别，如何计算函数沿任一方向的变化率，是否对于任意函数都可以求其沿着任一方向的变化率，等等。因此，根据学生的情况，应该充分抓住他们已有的兴趣，联系之前的知识，通过直观、简单、深入浅出的分析与讨论，轻松地解答他们的疑问。

教学目标

1．知识方面

理解方向导数的定义。
揭示方向导数的几何意义和实际意义。
明晰方向导数与偏导数两个概念之间的区别与联系。
大致了解方向导数的应用。

2．能力方面

在探究学习的过程中，培养学生独立思考、推理判断和创造性思维能力，以及理论联系实际的能力。

3．情感方面

将抽象概念直观化、具体化，增强学习的趣味性和目的性。

教学策略及整体思路：本次课程为概念型教学，为避免过于抽象枯燥，难于理解和运用，本着应用导向、探究学习与直观演示相结合的原则，分以下几步进行：

（1）从实际应用出发，自然引出新概念。

（2）通过知识回顾与挖掘，为探究新知做铺垫。

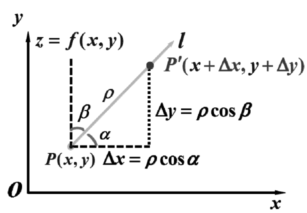
（3）用图形演示、分析问题、归纳总结的方法，提炼概念及定义并推广。

（4）直观演示几何意义，将抽象概念直观化，揭示概念内涵。

（5）通过求解具体问题，熟悉定义使用，探究概念与其它概念的区别与联系

（6）展望应用，强调概念的重要性。

（7）总结归纳，为后续学习做铺垫。



教学方法：启发式教学，探究式教学，多媒体教学。

教学过程：遵循“以实际应用需求为引导，回顾旧知识，引入新内容，抽象概念，揭示内涵，对比联系，并最终回归应用” 的原则实施教学过程。具体教学过程细节处理如下。

1．开宗明义，明确学习内容，增强学习目的性，有的放矢。

2．承前启后，从已有的偏导数概念反应沿坐标轴方向的变化率，延伸至其他实际应用问题中需要求其他方向上的变化率，自然引出方向导

数的概念。

3．回顾偏导数的定义，探讨偏导数定义中的方向性，从新的角度理解偏导数的定义为函数沿坐标轴正向移动经过一点时的函数的改变量与沿该方向移动的距离的比值的极限。为自然引出方向导数的定义做铺垫。

4．直观演示新问题，提炼方向导数的概念。

给定方向 l，方向角为 α、β，点 $P(x,y)$ 沿该方向移动至点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，移动的距离 $|PP'|=\rho$。

基于前面对偏导数定义的分析，自然地定义方向导数为函数的改变量与沿该方向移动的距离的比值的极限：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$。指出这种定义方法存在的误区，就是学生容易根据形式认为 Δx、Δy 是独立变化的，该极限误认为是二元函数的极限，而根据分析 Δx、Δy 仅依赖于沿该方向移动的距离 ρ 是相关变动的，由此给出更确切的定义：$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta)-f(x,y)}{\rho}$ 并强调 $\rho>0$ 是距离的概念，因此，这是一个单侧极限。至此，方向导数定义的引入已经是水到渠成，给出其定义。

定义：对于给定的点 $P(x,y)$ 及方向 l，方向角为 α、β，在定义域内沿 l 方向任取一点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，如果极限 $\lim\limits_{P'\to P}\dfrac{f(P')-f(P)}{|P'P|}$ 存在，则称该极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P 处沿方向 l 的方向导数，记作 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$。从而

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta)-f(x,y)}{\rho}$$

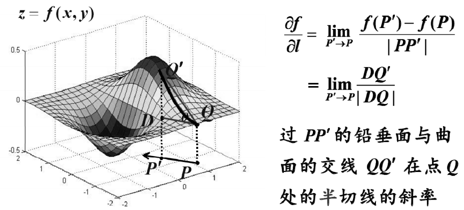
强调这是一个一元函数的极限问题，并通过求函数 $z=f(x,y)=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数具体问题演示。

5．概念推广，定义三元函数的方向导数。

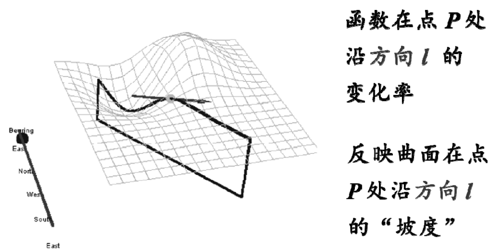
类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，给定方向 l，方向角 α、β、γ，在点 $P(x,y,z)$ 处沿着方向 l 的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma)-f(x,y,z)}{\rho}$$

6．演示方向导数的几何意义。



揭示方向导数的实际意义：



7．探究方向导数与偏导数之间的关系。

指出：偏导数仅仅刻画了函数沿平行于坐标轴的直线方向上的变化率，不足以反映函数在一点邻近沿所有方向的动态，故而函数偏导数存在，不能保证其任意方向上的方向导数都存在。

提出问题，引导学生思考：若在一点处沿任意方向的方向导数存在，函数在该点处的偏导数是否一定存在?

通过实例考察回答提出的问题，同时达到练习使用和熟悉方向导数定义的目的。

例 1：考察函数 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处沿任意射线方向 l 的方向导数及偏导数。

解：在原点处沿任意射线方向 l 的方向导数为

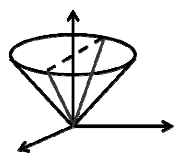
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+(\rho\cos\beta)^2}}{\rho}=1$$

在原点处关于 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{不存在！}$$

同理：在原点处关于 y 的偏导数 $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$ 不存在！

利用图形展示来帮助理解。

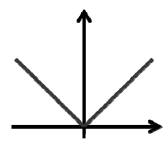


锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

偏导数不存在，

但：沿各方向“坡度”相同，

故：沿各方向方向导数存在



函数 $z=|y|$

学生熟悉的对应的二维问题：

导数不存在，但左右方向导数，

即：单侧导数存在

在探究的基础上得出结论：

偏导数强调整体连续指向性，方向导数体现局部指向性。

任意方向的方向导数都存在，不能保证偏导数存在；

偏导数存在也不能保证任意方向上的方向导数存在。

继续提出问题：若二者都存在，其关系如何？并通过对比定义得出结论：

偏导数等于沿着 x 轴正向经过该点时（方向导数则是从该点出发），函数的改变量与移动的距离之间的比值的极限。当二者都存在时：

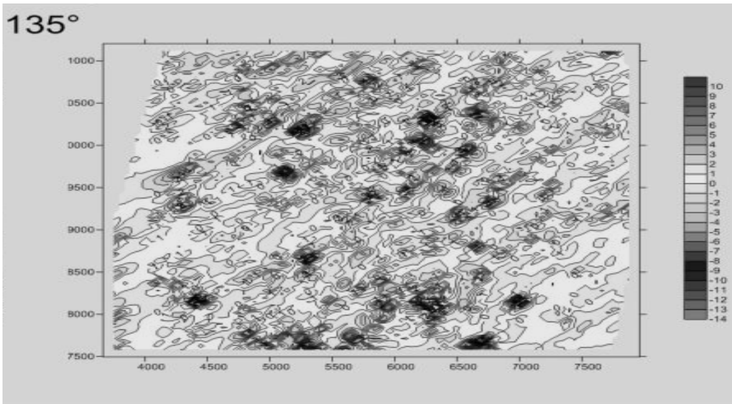
若 l 为沿 x 轴正向，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$，若 l 为沿 x 轴正向，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

8．应用实例

物探工作者通过磁场声波时差在某地各点处沿着 0°— 45°—90°—135°方向的一阶方向导数分析来确定声波时差和该地岩体的相关性。

所有磁带异常均倾向 135°方向。结合地质可以断定，当地岩体走向基本为 135°走向。同时指出，运筹学中最基本的优化算法最速下降法，即是沿着函数值减小最快的方向进行迭代求解的。方向导数研究多元函数在任意方向上的变化情况，是偏导数知识的拓广和深入，也是多元函

数微分理论到最优化实际问题解决的过渡，可以说架起了多元微分学理论与实际应用的桥梁。强调方向导数学习的重要性。



9．教学内容总结。

方向导数的定义：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to 0^{+}}\dfrac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\cos\beta)-f(x,y)}{\rho}$

方向导数的几何意义：曲面上沿给定方向的曲线之半切线的斜率方向导数与偏导数之间的关系。

任意方向的方向导数都存在，不能保证偏导数存在

偏导数存在也不能保证任意方向上的方向导数都存在

当二者都存在时：若 l 为沿 x 轴正向，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$；若 l 为沿 x 轴正向，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

10．课后练习。

求函数 $z=f(x,y)=x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数。

行列式判定线性无关

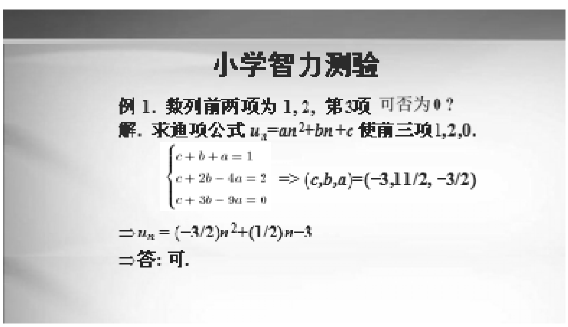
李尚志
北京航空航天大学

本微课的目的是引入行列式。

预备知识：只要求中学数学，只要懂得空间几何向量的三维坐标即可。不要求懂行列式的定义和算法，也不要求懂得线性相关和线性无关。

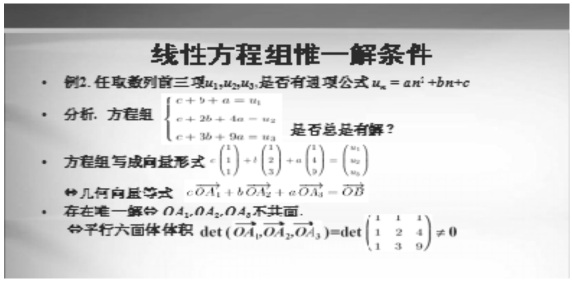
本课引入行列式, 但不讲行列式的定义和算法,只讲为什么我们需要行列式，用行列式干什么。当然不能讲行列式的所有应用，只讲一个最重要的应用：判定 n 元一次方程组是否有唯一解，也就是判定 n 个 n 维向量是否线性无关。

本课从小学老师的智力测验开始，引入求数列的通项公式问题。

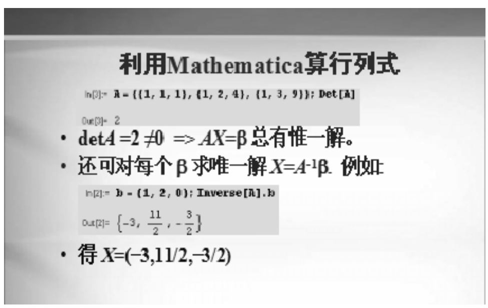


用待定系数法求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 作为任意三元数列 u_1,u_2,u_3 的通项公式，得到 a,b,c 满足的三元一次方程组。不是研究它的解法，而是研究它有唯一解的条件。也不是用代数方法去研究，而是将方程组写成向量形式 $a_1+b_2+c_3=$，变成三维为三个几何向量 1, 2, 3 是否共面的问题，进一步归结为代表三个向量的三条有向线段为棱的平行六面体的体积是否

为 0 的问题。这个平行六面体的有向体积就是三阶行列式= det(1, 2, 3)。



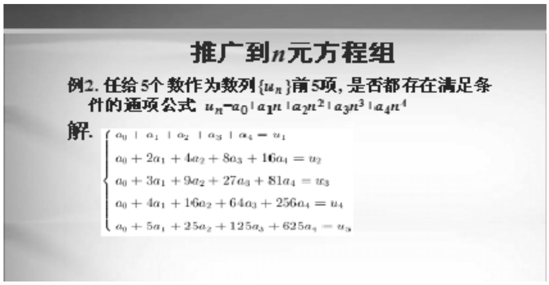
本课不讲怎么计算三阶行列式，把计算行列式的任务交给计算机去完成。正如中学数学只教学生用三角函数来解决问题，不教怎么计算三角函数，计算三角函数可以查表或用计算器就行了。其实，即使我们教了怎样算行列式，也只能算低阶行列式，实际应用中需要的稍微高阶的行列式都不能用手算而只能用计算机。实际工作中连做除法都不手算而用计算器，何况行列式。能够借助于计算机计算行列式来判定方程组是否有唯一解，对多数人来说就已经很不错了。



知道了三阶行列式就是平行四面体的有向体积（它的绝对值就是体积，正负号表示三条棱排成右手系还是左手系），很自然就理解了体积不为零就是不共面，就有唯一解。当然也就理解二阶行列式是平行四边形有向面积，面积不为零就是不共线，也有唯一解。

推广到 n 元一次方程组，很自然就容易把 n 元数组想象成 n 维向量，n 阶行列式想象成 n 维体积，n 维体积等于 0 就是退化成 n−1 维，这就是线性相关的概念，不退化就是线性无关。利用计算机计算行列式，二维、三维与 n 维没有区别，通过 n 元一次方程组来理解 n 维数组向量及其线

性无关也很自然，不存在困难。而如果直接把二维或几何向量推广到四维以上，学生就会纠结于四维空间怎么画图等不自然的问题。



本课不讲行列式的计算，只讲 3 阶行列式的几何性质，很自然就会有学生希望知道行列式到底怎样计算，在此基础上进一步讲行列式的定义和计算，学生就有学习动力，不是强加于学生。在我的 MOOC《线性代数启蒙》中正是在此基础上讲行列式，并且仍然不是枯燥地讲定义，而是根据 2 阶和 3 阶行列式的几何性质推出代数性质，再将代数性质推广到 n 阶作为公理，推出行列式的定义。例如，3 阶行列式两列相等，也就是三条棱有两条重合，三条棱当然共面，体积当然为 0，推广到 n 维就是：两列相等，行列式为 0。又如，小学计算平行四边形面积是用割补法把它变成矩形。翻译成代数语言，割补法就是把行列式任一列乘常数加到另一列，行列式不变。用这样初等变换将行列式化成对角形，就是变成矩形求面积。

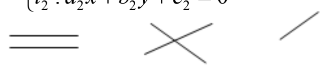
线性方程组的解

高　阳

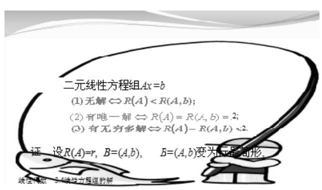
中国石油大学（北京）

<table>
<tr><td rowspan="2">教学内容</td><td rowspan="2">章节名称</td><td colspan="2">第 3 章矩阵的初等变换和线性方程组的解</td><td colspan="3" rowspan="2">授课时间</td><td rowspan="2">15 分钟</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.4 线性方程组的解</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="2">内　容</td><td>记忆</td><td>理解</td><td>应用</td><td>综合</td><td>实现途径</td></tr>
<tr><td>知识目标</td><td colspan="2">1. 能够理解线性方程组的求解方法
2. 能够应用线性方程组有解的判别定理</td><td></td><td></td><td>A</td><td>B</td><td rowspan="3">课堂讲授、互动讨论、学生自学、课堂演示</td></tr>
<tr><td rowspan="2">能力目标</td><td colspan="2">内　容</td><td>接触</td><td>训练</td><td>应用</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">综合问题的解决方案
分析问题
验证假设和结论</td><td></td><td>B
B</td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="7">线性方程组有解的判别定理的证明及应用</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="7">线性方程组有解的判别定理的应用</td></tr>
<tr><td>教学单元分析</td><td colspan="7">求解线性方程组是代数知识中比较重要的一部分内容，自小学接触二元一次方程组开始，随着知识面的拓宽和加深，学生会越来越深入地接触到求解问题。对于二元三元的线性方程组，在高中阶段就介绍了多种求解方式，但是并未经过严格理论推导，所谓的“有解”“无解”只是凭学生的直观感觉。矩阵是线性代数课程的核心内容，因此，利用矩阵工具求解线性方程组是一个十分重要的手段。
本节中线性方程组有解的判别定理给出了判定线性方程组有解、有唯一解及无解的方法，在线性方程组求解的相关理论中具有重要的地位，是本节的教学重点和难点</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td rowspan="2">教学内容</td><td rowspan="2">章节名称</td><td colspan="2">第 3 章矩阵的初等变换和线性方程组的解</td><td colspan="3" rowspan="2">授课时间</td><td colspan="2" rowspan="2">15 分钟</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.4 线性方程组的解</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="2">内　容</td><td>记忆</td><td>理解</td><td>应用</td><td>综合</td><td colspan="2">实现途径</td></tr>
<tr><td>学生特点分析</td><td colspan="8">对于刚上大二的学生来讲，他们对高中的知识还比较熟悉，同时又刚刚学习了高等数学，因此，教学中教师应注重引导学生由已掌握的平面上两直线的位置关系推广延伸，进而归纳总结出线性方程组有解的判别条件，得出线性方程组有解的判别定理。教师应多提问题，注意精讲和启发，提出解决问题思路，引导学生观察、分析和思考，引导学生用探究式学习模式学习，将知识的传授与学生能力紧密结合起来，以实现能力培养目标</td></tr>
<tr><td>教学设计</td><td colspan="6">教学内容及思路</td><td>教学意图及实现途径</td><td>时间分配</td></tr>
<tr><td>讲授总体思路</td><td colspan="6">本节课采取启发式教学法，借助多媒体工具，引导学生根据已有知识进行归纳总结推广，进而获得新的知识。使学生通过回忆已有知识，进行总结和思维转换，借助师生互动及生生互动研讨的方式推广已有知识，得到新的知识，并在探索过程中充分利用假设分析、结果验证等多种方式方法对结论进行推理和验证。之后通过例题体会新知识、新方法的重要性和优势。最后进行总结和思考，引导学生进一步抽象结论；并举出实际生活中的问题，引导学生理解理论方法与实际问题的差异，引导学生接受理论方法存在局限性这一问题，并鼓励学生积极探索适当的方法将理论知识在实践中发挥最大的作用。
本节课主要培养学生观察现象、发现知识、提出问题和表述问题、具有抽象化能力，以及总结归纳的能力。实现对学生具有抽象化能力和总结归纳能力的训练</td><td></td><td>15 分钟</td></tr>
<tr><td>教学过程设计</td><td colspan="6">教学过程如下：
一、新课引入
讨论：如何利用系数矩阵的秩和增广矩阵的秩来讨论线性方程组的解
引例：讨论下面两条直线的交点
$$\begin{cases} l_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ l_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$
</td><td>以新课在课程体系中的位置引入。
能力目标：
知识、能力掌握程度：
引导学生根据已有的知识结论进行推</td><td>5 分钟</td></tr>
</table>

续表

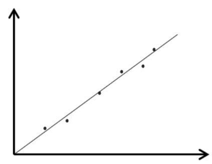
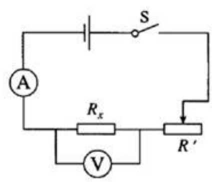
<table>
<tr><td>教学内容</td><td>章节名称</td><td colspan="4">第 3 章矩阵的初等变换和线性方程组的解
3.4 线性方程组的解</td><td colspan="3">授课时间</td><td colspan="2">15 分钟</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">内　　容</td><td>记忆</td><td>理解</td><td>应用</td><td>综合</td><td colspan="2">实现途径</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">学特点分析：
两条直线的位置关系是高中应知应会的知识点，同时也是高考的考点之一，相信绝大多数学生都对这一知识点非常熟悉。
根据高中平面解析几何的知识可知：若两直线平行且不重合，则 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$；若两直线相交，则 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$；若两直线重合，则 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$。
现给出两个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$，引导学生通过自行观察发现：若两直线平行且不重合，则 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{B})$；若两直线相交，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$；若两直线重合，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$。从而得到了直线位置关系与矩阵的秩之间的联系。现在再从代数的角度看，两直线平行且不重合，说明方程组无解，两直线相交，说明方程组有唯一解，两直线重合，说明方程组有无穷多组解。至此得到了方程组解的情况与矩阵的秩之间的关系，进而引出线性方程组有解判别定理</td><td>广，从而获得新的知识。
在教师启发下抓住线性方程组有解判别定理的实质，提高归纳总结的能力。
教学策略：演示、启发、以问题为导向的探究式互动讨论、层层深入</td><td></td></tr>
<tr><td>教学过程设计</td><td colspan="8">二、线性方程组有解的判定条件


定理 4：n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$
（1）$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$;
（2）有唯一解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$;
（3）有无穷多解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n.$
证明（略）</td><td>培养学生能力目标：
实现对学生分析问题、验证假设和结论能力的训练。同时通过例题对综合问题的解决方案这一能力进行训练。
知识、能力掌握程度：
在教师启发</td><td>6 分钟</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td>教学
内容</td><td>章节
名称</td><td colspan="5">第 3 章矩阵的初等变换和线性方程组的解
3.4 线性方程组的解</td><td>授课时间</td><td colspan="2">15 分钟</td></tr>
<tr><td>教学
目标</td><td colspan="2">内　　容</td><td>记
忆</td><td>理
解</td><td>应
用</td><td>综
合</td><td colspan="3">实现途径</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">应用：证明方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$ 在有解的情况下，求出它的一切解.
$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \boldsymbol{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{a}_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \boldsymbol{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boldsymbol{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{a}_i \end{pmatrix}$$
（将第五行分别加上第 1、2、3、4 行）
方程组有解当且仅当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，当且仅当 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$
$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$
由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$
由此得通解：$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases}$ $(x_5$为任意实数$)$.</td><td colspan="2">下练习对比方法，以及架构知识的能力。理解并能够熟练运用定理 4
教学策略：采取提问、启发、层层深入教学策略，发现知识的历史过程的思想方法</td><td></td></tr>
<tr><td>教学
过程
设计</td><td colspan="6">三、复习小结
n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$
（1）无解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$;
（2）有唯一解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = n$;
（3）有无穷多解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) < n$.
四、思考
齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$
$\boldsymbol{R(A)=n \Leftrightarrow Ax=0}$ **只有零解;**</td><td colspan="2"></td><td>1
分
钟</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td rowspan="2">教学
内容</td><td rowspan="2">章节
名称</td><td colspan="5">第 3 章矩阵的初等变换和线性方程组的解</td><td colspan="2" rowspan="2">授课时间</td><td colspan="2" rowspan="2">15 分钟</td></tr>
<tr><td colspan="5">3.4 线性方程组的解</td></tr>
<tr><td>教学
目标</td><td colspan="2">内　　容</td><td>记
忆</td><td>理
解</td><td>应
用</td><td>综
合</td><td colspan="4">实现途径</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解.</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>教学
过程
设计</td><td colspan="6">五、思维拓展——实际解线性方程组面临的新问题
1. 伏安法测电阻（$U=IR$）



超定方程组的解——最小二乘法
2. 解的稳定性(再次回到引例)
$$\begin{cases} x_1+x_2=10001 \\ 0.9999x_1+x_2=10000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=10000 \\ x_2=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1+x_2=10000 \\ 0.9999x_1+x_2=10001 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-10000 \\ x_2=20000 \end{cases}$$
<table><tr><td></td><td>绝对误差</td><td>相对误差</td></tr><tr><td>b_1</td><td>1</td><td>0.01%</td></tr><tr><td>b_2</td><td>-1</td><td>0.01%</td></tr><tr><td>x_1</td><td>20000</td><td>200%</td></tr><tr><td>x_2</td><td>-19999</td><td>1999900%</td></tr></table>
引出实际与理论的差别，引导有兴趣的同学继续阅读
参考文献：
[1] 杨文采.地球物理反演的理论和方法[M].北京：地质出版社，1996
[2] 王家映.地球物理反演理论(第二版).高等教育出版社，2002</td><td colspan="3">能力目标：通过实际生活中的问题使学生理解理论方法与实际问题的差异，理性思考解决综合问题的方案。
知识、能力掌握程度：分层次教学，全体学生都要求理解第一个问题出现的原因及解决办法，第二个问题作为科普知识介绍，供学有余力的学生做进一步思考。
教学策略：引导学生理解理论知识在实际应用中的局限性问题，激发学生的求知欲</td><td>3
分
钟</td></tr>
</table>

矩阵的秩

侯首萍
北京农学院

作品标题： 矩阵的秩
所属课程： 线性代数
相关知识点： 极大线性无关组 向量组的秩
知识点编码： 030302 030303
授课对象： 本科生（文科 农科）
授课时长： 12 分钟
参考文献： 刘建慧，杜晓林主编. 线性代数问题解析与模型分析[M]. 北京：中国农业出版社.

教学目标

◆知识点
◇理解矩阵秩的定义，矩阵的秩和向量组的秩的关系。
◇掌握初等变换求矩阵秩的方法。
◆能力培养
◇培养学生的线性思想，以及利用线性思想解决线性问题的能力。
◇通过恰当的比喻，引导学生欣赏数学的美，培养学生丰富的想象力。
◇通过实例，培养学生发现、分析、解决问题的能力。

教学内容

◆矩阵的秩的定义。
◆求矩阵的秩的方法。

教学重点与难点

◆教学重点
◇矩阵的秩的定义；求矩阵的秩的方法。
◇处理措施：秩是矩阵非常重要的一个数字特征，由现实生活各种各样的线性问题和有趣的故事说明学习矩阵秩的重要性；由极大线性无关组和向量组的秩引出矩阵秩的定义；从研究最简单的一类矩阵（阶梯形矩阵）推导出求矩阵秩的方法，并举例说明。
◆教学难点
◇矩阵的秩和向量组的秩的关系。
◇处理措施：重点讲解；启发学生主动思考；以学生熟悉的知识极大线性无关组、向量组的秩为切入点，深入浅出，引出矩阵秩的定义；了解矩阵的秩和向量组秩的关系。

教材分析

◆矩阵的秩是矩阵理论中的一个重要概念。矩阵这一数学概念与工程技术问题相结合，成为表达手段，主要依赖于它的种种运算和变换。初等变换是矩阵的重要变换之一，利用初等变换可以求矩阵的秩。

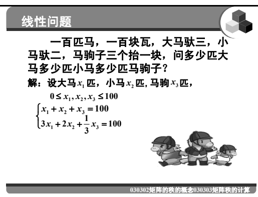
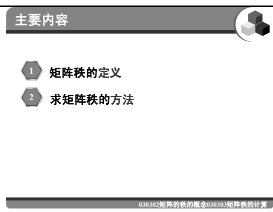
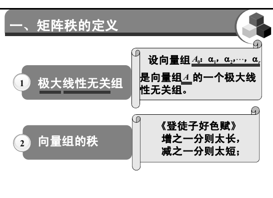
教学手段

◆以课堂讲授为主，适当穿插练习、思考等互动教学方式。

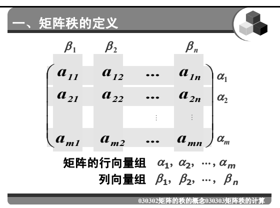
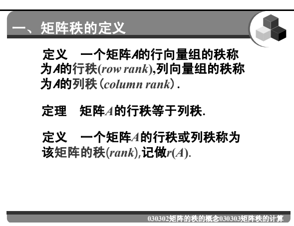
◆多媒体演示与黑板讲课相结合。

◆通过有趣的数学问题，培养学生理论联系实际的能力。

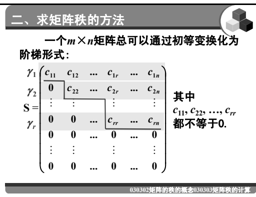
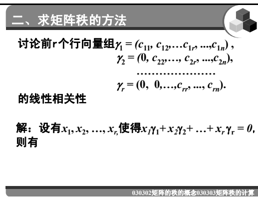
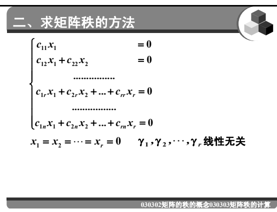
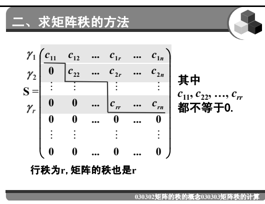
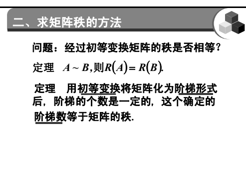
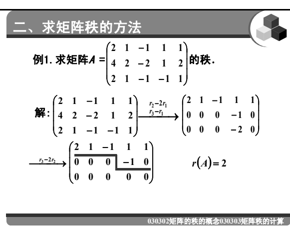
教学过程

教学内容	表达方式
	今天，我们一起来学习矩阵的秩。矩阵的秩是矩阵中非常重要的一个数字特征，正如衡量人体的健康有很多指标，体温就是非常重要的一个指标，人是否生病有时可以通过体温来衡量，利用矩阵的秩我们可以像医生一样，对线性方程组的解进行诊断
	线性问题与我们的生活息息相关，在各个领域得到广泛的应用，例如：生物化学、计算机图形学、国民经济的投入产出问题、交通流量问题、商业竞争问题，都需要求解线性方程组，这时可能会遇到规模较大的线性方程组，例如，100 个方程 100 个未知量，甚至 1000 个方程 2000 个未知量
	当然我们也经常遇到有趣的数学问题。 这是由两个方程、三个未知量构成的线性方程组，它是否有解，在有解的情况下，有唯一解还是无穷多解？这个问题和矩阵的秩密切相关
	今天我们将给大家介绍矩阵秩的定义和求矩阵秩的方法
	提起秩这个概念，我们并不陌生，在上一节课中学习了两个非常重要的概念：极大线性无关组和向量组的秩，一起来回忆一下。极大线性无关组有两个修饰语：极大、线性无关，顾名思义就是最大的线性无关组。现在设A_0是A的一个极大线性无关组，这时A_0应满足两个条件：（1）A_0

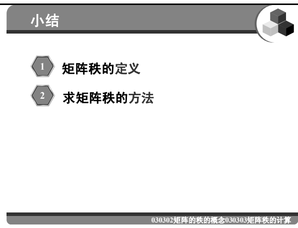
续表

教学内容	表达方式
	中的r个向量是线性无关的；（2）$\boldsymbol{A}$ 中任意$r+1$个向量线性相关，或者说$\boldsymbol{A}$中任一向量都可由极大线性无关组A_0线性表示。线性表示是相当厉害的，如果不小心将$\boldsymbol{A}$中的某一个向量丢了，可以通过极大无关组A_0再把它找回来，也就是说掌握了向量组的极大线性无关组也就掌握了这个向量组。现在请大家思考一个问题：当我们在A_0中增加或者减少向量时，会发生什么变化？它还是极大线性无关组吗？如果我们在A_0中增加一个向量，变成$r+1$个向量，相关了，不满足线性无关这个条件，不再是极大线性无关组；如果在A_0中减少一个向量，这时不满足极大这个条件，也不再是极大线性无关组了。可见极大线性无关组非常完美，多一个不行，少一个也不行，真可谓增之一分则太长，减之一分则太短，就像一个天生丽质的美人，生的真是恰到好处！借用《登徒子好色赋》中描写美人的诗句来形容极大线性无关组
	向量组中的极大线性无关组所包含向量的个数称为向量组的秩，可见向量组的秩是一个唯一确定的数
	那么什么是矩阵的秩呢？矩阵$\boldsymbol{A}$可以看做一行一行又一行，每行代表一个行向量，由行向量构成的向量组称为矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组，又可以看做一列一列又一列，每列代表一个列向量，由列向量构成的向量组称为矩阵$\boldsymbol{A}$列的向量组
	

续表

<table>
<tr><th>教学内容</th><th>表达方式</th></tr>
<tr><td>
</td><td>如何来计算矩阵的秩呢？
我们知道……
阶梯形矩阵是最简单的一类矩阵，首先我们来讨论阶梯形矩阵的秩，阶梯形矩阵的特点：
现在我们讨论前 r 个非零行向量行向量的线性相关性</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>从第一个方程解得 $x_1=0$，代入第二个方程即有 $x_2=0$，依次代入下面的方程，得到 $x_1=x_2=\cdots=x_r=0$. 可见阶梯形矩阵 S 的前 r 个行向量线性无关，s 的后 m-r 个行向量都为零向量,显然能表示为前 r 个行向量的线性组合.根据极大线性无关组定义，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 是阶梯形矩阵 s 的一个极大线性无关组, 所以行秩为 r ,列秩和矩阵的秩也是 r</td></tr>
<tr><td>
</td><td>这说明对于阶梯形矩阵，它的秩就等于阶梯数（即非零行的行数），一看便知无须计算，因此我们自然想到用初等变换把矩阵化为阶梯形矩阵来求秩，但是经过初等变换后矩阵的秩是否相等呢？下面的定理对此做出肯定的回答</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>来看一个例题。
在这里要注意的是，差之毫厘，谬以千里，在线性代数的计算中体现得淋漓尽致，一个数字甚至一个符号的错误将会导致结果完全不同，所以我们需要有足够的耐心和细心</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学内容</th><th>表达方式</th></tr>
<tr><td>
</td><td>小结</td></tr>
<tr><td>
</td><td>我们用一句话结束这节课</td></tr>
</table>

特征值与特征向量

黄春娥
北京联合大学

作 品 标 题：特征值与特征向量的概念
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：特征值与特征向量的概念
知识点编码：050201
授 课 对 象：一年级本科生
授 课 时 长：17 分 41 秒
参 考 文 献：[1] 张学工. 模式识别（第三版）[M]. 北京：清华大学出版社，2010.
[2] 同济大学数学系. 工程数学线性代数（第五版）[M]. 北京：高等教育出版社，2007.
[3] 程自龙, 雷秀玉. 基于 K-L 变换（PCA）的特征脸人脸识别方法综述[J]. 中国科技论文在线.
[4] 梁冯珍，关静，等，译. 统计学（原书第五版）[M]. 北京：机械工业出版社.
[5] 阮冰. 基于特征向量的文本信息过滤算法研究[J]. 现代电子技术, 2010, 4.

1. 教学背景

《线性代数》第五章相似矩阵与二次型可视为前四章知识的应用部

分，而特征值与特征向量的概念是这一章的重要概念，同时是理工科学生要求重点掌握的内容。一方面，特征值与特征向量的概念分析及其求解过程能体现数学探究的基本思想；另一方面，这部分内容有很强的应用背景，广泛应用于图像处理的人脸识别、Google 搜索的网站排名、AHP 层次分析法等领域，因此能够提高学生的学习兴趣，激发学习热情，促进理论与实际应用相结合。

2. 教学目标

（1）使学生熟练掌握特征值与特征向量的定义；掌握特征值和特征向量的求解方法，培养学生严谨的数学逻辑思维能力。

（2）使学生了解特征值和特征向量的应用及其求解的 MATLAB 命令，扩大学生的知识面，激起其进一步探究的兴趣。

3. 教学内容

特征值和特征向量的定义、求解及其应用。

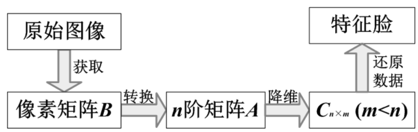
4. 重点难点分析

重点分析：特征值和特征向量的定义及其求解是本节课要求学生掌握的重点内容。一方面，特征值和特征向量手动求解的过程可以看做行列式的计算，以及解齐次线性方程组知识的应用；另一方面，特征值和特征向量在图像处理的人脸识别等领域广泛应用，是重要的数学工具。

难点分析：理解特征值和特征向量的定义及其几何意义是本节课的难点。

5. 教学方法和过程

表 1　教学方法和过程详表

教学环节	教学过程	教学方法
一、引入	结合直观的图像进行说明：图像处理人脸识别技术中的 K-L 变换法：人脸图像转换为特征脸。该方法方便人脸图像的存储和识别。K-L 变换法的图像处理过程如下：  降维是关键步骤，问题：$\boldsymbol{A}$ 怎样通过降维得到 $\boldsymbol{C}$ 呢？ 若有关系式　　$\boldsymbol{A}\, xi = \lambda i\, xi$　　$(\lambda i \in R)$， 成立，其中 λi 是数, xi 是 n 维非零列向量,将 λi 从大到小排列， 依次取若干个较大的 λi, 将其所对应的 m 个向量 xi 组成 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 从而实现降维的目的。在该过程中该关系式发挥着重要的作用，其中的数 λi 和 n 维非零列向量 xi 分别就是我们今天要讲的特征值与特征向量	通过图像处理人脸识别的应用引入知识点，激发学习兴趣及进一步探究的热情
二、特征值与特征向量的定义	特征值与特征向量的定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式 $\boldsymbol{A}x=\lambda x$ 成立，那么数 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。非零向量 x 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。 该定义表明：所谓的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量就是满足该关系式的数 λ 和 n 维非零列向量 x。在该定义中应注意如下二点： ①$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵；②特征向量非零。 问题：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量是否唯一？（不唯一） 若 x 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A}x=\lambda x$，任取 $k\neq 0$，有 $\boldsymbol{A}(k\,x)=\lambda(k\,x)$，表明 $k\,x(k\neq 0)$也是特征值 λ 对应的特征向量。 下面来看如下例题： **例 1**：设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix}$, 试问 u，v 和 w 是否是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量?	讲授法、分析法和提问法相结合。通过对定义的详细分析、例题的讲解及几何意义的介绍，加深对定义的理解

续表

教学环节	教学过程	教学方法
	解：因为 $Au=\begin{pmatrix}2&1\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=2u$ 所以 u 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 2 对应的特征向量。 由于 $Av=\begin{pmatrix}2&1\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}v$ 因此，v 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1/2 对应的特征向量。 又因为 $Aw=\begin{pmatrix}2&1\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3/2\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\lambda w.$ 所以 w 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。 问题：若将定义中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看做线性变换的话，则在直角坐标系中例 1 中的向量分别在线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的作用下有什么规律？ 通过观察得出一般规律：一般地，若 x 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，则可以看成变换 $\boldsymbol{A}$ 将 x 变为 λx，即 x 在变换 $\boldsymbol{A}$ 的作用下只进行了伸缩变换	
三、特征值与特征向量求解	问题：怎样求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量？ 由特征值和特征向量的定义有：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x=0$…….(1) 齐次线性方程组(1)有非零解的充分必要条件为$\|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\|=0$，即 $$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$ 该式是关于 λ 的一元 n 次方程，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。 特征方程左边行列式$\|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\|$ 展开后是 λ 的 n 次多项式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。 因此，要求解方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只要解特征方程求出 $\boldsymbol{\lambda}$ 即可。$\boldsymbol{\lambda}$ 对应的特征向量就是满足该式的齐次线性方程组的非零解，因此，解齐次线性方程组，所有的非零解就是特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 对应的特征向量。 通过刚才的分析，总结方阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值和特征向量的求解步骤如下： 求特征值：求解特征方程 $\|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\|=0$ 的根。 求对应特征值的特征向量：解出齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda E)x=0$ 的非零	通过问题驱动分析方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的求解方法，通过例题讲解熟练掌握该方法

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学过程</th><th>教学方法</th></tr>
<tr><td></td><td>解，即为特征值 λ 对应的特征向量。
例 2　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。
解：$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}$
$=(2-\lambda)[(-1-\lambda)(3-\lambda)+4]=(2-\lambda)(\lambda-1)^2$
令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。
当 $\lambda_1=2$ 时，求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x=0$
$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
得其基础解系为 $x_1=(0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$.
所以，$kx_1(k\neq0)$ 是特征值 $\lambda_1=2$ 对应的全部特征向量
当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})x=0$
$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$
得其基础解系为 $x_2=(-1\quad -2\quad 1)^{\mathrm{T}}$。
所以，$kx_2(k\neq0)$ 是特征值 1 对应的全部特征向量</td><td></td></tr>
<tr><td>四、特征值与特征向量的应用</td><td>回归到前面提到的图像处理人脸识别 K-L 变换法，通过对方阵特征值与特征向量的学习，可以发现 K-L 变换法中的降维过程与它们密切相关，我们可以将降维的过程总结为如下两步：
第一步　求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；
第二步　保留较大特征值对应的特征向量构成矩阵 $\boldsymbol{C}$。
下面通过一个例题来了解一下该过程。
例 3　在人脸识别 K-L 变换法的降维过程中，假设像素矩阵 $\boldsymbol{B}$ 转换为三阶方阵 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.616555556&0.215444444&0.206777777\\0.215444444&0.423222222&0.416555556\\0.206777777&0.416555556&0.420333333\end{pmatrix}$
求降维后的矩阵 $\boldsymbol{C}$。
解：求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的 MATLAB 命令如下：
$[\boldsymbol{P},\boldsymbol{\varLambda}]=\mathrm{eig}(\boldsymbol{A})$
其中，$\mathrm{eig}(A)$ 为求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，左边的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为特征向量组成</td><td>回归到图像处理人脸识别 K-L 变换法，通过应用举例，开拓学生视野，引导学生进一步探究的兴趣，并增强解决实际问题的能</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学过程	教学方法
	的矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角元素为特征值的对角矩阵。输出结果如下： $$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0.005157309&0&0\\0&0.409004131&0\\0&0&1.045949671\end{pmatrix}$$ $$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-0.011122392&0.820940671&0.570905165\\0.708653650&-0.396334247&0.583720112\\-0.705468849&-0.411066393&0.577354418\end{pmatrix}$$ 记 $\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线上元素为 λ_1，λ_2，λ_3，其对应的特征向量分别为 x_1，x_2，x_3，从输出结果我们可以观察到 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，且 λ_2 远远大于 λ_1，因此，保留特征值 λ_3=1.045949671 和 λ_2=0.409004131 对应的特征向量可得矩阵 $C=\begin{pmatrix}0.570905165&0.820940671\\0.583720112&-0.396334247\\0.577354418&-0.411066393\end{pmatrix}$。 通过例 3 我们了解到了 K-L 变换法中的降维过程。然而，在实际人脸图像处理过程中，一副人脸的图像往往是上百维的，针对这样的情况我们也可以利用本例题中介绍的方法进行降维处理。特征值与特征向量不仅在图像处理中有应用，在其他领域也有广泛的应用，如 Goolge 搜索的网站排名、AHP 层次分析法等，有兴趣的同学可以查阅相关的资料做进一步了解	力。特别地，介绍求解 A 的特征值和特征向量的 MATLAB 命令，为求解特征值和特征向量提供方便且实用的方法
五、小结	这节课的内容就讲到这里，我们来总结一下这节课的重点要求掌握的内容：特征值和特征向量的定义及特征值和特征向量求解	明确重点要求掌握的内容
作业	1.求 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。 2. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&6&-8\\0&0&6\\0&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&1&0\\5&3&4\end{pmatrix}$ 的特征值，并观察矩阵的特征值与矩阵的关系。 注意观察矩阵的特征值与矩阵之间的关系，这将是我们下节课要讲解的特征值和特征向量的性质	掌握求特征值和特征向量的方法，为学习特征值和特征向量性质做准备

6. 教学总结

本课知识点为“特征值与特征向量的概念”，这是理工科学生重点要求掌握的内容。在教学设计、实施过程中，坚持“理论联系实际”的教学原则，鼓励学生积极探究和思考，使他们在掌握基本数学思想和方法的同时，了解知识点的应用，具体如下：

在内容安排上，注意内容的合理、紧凑性和连贯性，循序渐进，重难点突出，采用理论讲授和例题结合、加入应用实例的方法，充分调动学生学习积极性，且激发学生进一步探究的热情。

教学方式上以问题驱动学生积极思考、探究，发挥其主体作用。

教学形式上将板书和多媒体课件有机结合，引导学生深入理解知识点所蕴涵的数学思想和方法，了解其应用，并介绍了相关的 MATLAB 命令，激发学生进一步探索的热情，为求解特征值和特征向量提供方便且实用的方法。

矩阵的相似对角化

苏贵福
北京化工大学

作 品 标 题：矩阵的相似对角化
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：相似矩阵　矩阵对角化
知识点编码：050302
授 课 对 象：生物专业
授 课 时 长：15 分钟
参 考 文 献：同济大学数学系. 线性代数（第五版）[M]. 北京：高等教育出版社.

教学内容

相似矩阵的定义；矩阵可对角化的充要条件。

教学目标

掌握相似矩阵的定义；会判断给定矩阵是否可对角化。

教学重点

掌握方阵的特征值与特征向量的计算方法。

教学难点

掌握方阵的特征值与特征向量的计算方法；判断给定矩阵是否可对角化。

教学过程

一、旧知识回顾

记$M_n(C)$表示复数域上全体n阶方阵构成的集合。

定义 1 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(C)$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的相似矩阵，或称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似。

对$\boldsymbol{A}$进行运算$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$称为对$\boldsymbol{A}$进行相似变换，可逆矩阵$\boldsymbol{P}$称为把$\boldsymbol{A}$变成$\boldsymbol{B}$的相似变换矩阵。

性质 1 相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。

性质 2 属于不同特征值的特征向量线性无关。

二、矩阵的相似对角化

矩阵相似是$M_n(C)$上的一个等价关系，属于同一个等价类中的两个元素相似.

目标 试图寻找$M_n(C)$中的最简单或最漂亮的代表元。

问题 什么是$M_n(C)$中的最简单或最漂亮的代表元？

（1）论证O_n和E_n都不是$M_n(C)$中最简单的代表元。

（2）通过反例说明对角阵不能是$M_n(C)$中最简单的代表元。

若当定理[1] 设$\boldsymbol{A}\in M_n(C)$，那么$\boldsymbol{A}$相似于对角形矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} J_1 & 1 & & \\ & J_2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & J_s \end{bmatrix}，\text{其中 } J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_l \end{bmatrix}_{k\times k}$$

且$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$中有一些可以相等.

定义 2 设$\boldsymbol{A}\in M_n(C)$，若存在相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$为对

角阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(C)$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

证明 ($\Rightarrow$) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化则, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 且 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.于是

$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (*)

$\because\ \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(\boldsymbol{A}p_1,\boldsymbol{A}p_2,\cdots,\boldsymbol{A}p_n)$

$\boldsymbol{P\Lambda}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=(\lambda_1 p_1,\lambda_2,p_2,\cdots,\lambda_n p_n)$

$\therefore\ \boldsymbol{A}p_i=\lambda_i p_i(i=1,2,\cdots,n)$

$\because$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆

$\therefore\ p_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 而 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量.

根据定理 2, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

($\Leftarrow$)上述证明过程直至(*)式均可逆推, 余下的问题是 $\boldsymbol{P}$ 是否可逆。（性质 2 可以保证）

推论 1 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(C)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化且 $\boldsymbol{A}$ 相似于下述矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

三、应用举例

通过欣赏自制短片《花瓣中的数学》提出问题:

这些花的花瓣数呈现什么规律？

根据短片及学生课外调研得知: 兰花、百合花的花瓣有 3 瓣; 毛茛属的植物有 5 瓣花; 许多翠雀属的植物有 8 瓣花; 万寿菊的花有 13 瓣; 紫菀属植物的花有 21 瓣; 大多数雏菊的花有 34, 55, 89 瓣等特性.

例 1 斐波那契数列 $\{F_n\}$ 是这样一个数列

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$$

满足递推公式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 及初始条件 $F_0 = 0, F_1 = 1$。

问题 1. 斐波那契数列的通项公式是什么？

问题 2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = ?$

解 令 $\Theta_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$, 注意到 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，则有

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\Theta_{n+1} = A\Theta_n$，进而 $\Theta_n = A^n \Theta_0$。

易知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. 由推论 1 知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，而且属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量分别为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P} = [\alpha_1, \alpha_2]$ 为一可逆矩阵, 且满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

由递推公式及初始条件

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \text{(黄金比)}$$

练习 2. 判断矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$是否可以对角化？(不能)

四、教学总结

（1）理解相似矩阵的概念及性质。
（2）掌握方阵可对角化的充要条件。

五、课后作业

（1）预习当矩阵有多重特征值时，如何判别其是否可对角化。
（2）第 135 页 15、16 题。
复习旧知识
引入新概念
若当定理证明不作要求
定理 1 给出了方阵可对角化的充要条件。
定理 1 给出了求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的方法。
对角阵主对角元依次是特征向量相对应的特征值，切勿随意颠倒次序。
因特征向量不唯一，所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也不唯一。

展示短片，评价学生课外调研成果，探究花瓣中生物规律，并运用矩阵对角化知识解决问题。

总结归纳矩阵可对角化的五个步骤。

特征值与特征向量的概念

管　涛
中国人民公安大学

作 品 标 题：特征值与特征向量的概念
所 属 课 程：线性代数
相关知识点：特征值与特征向量的概念
知识点编码：050201
授 课 对 象：中国人民公安大学网络安全专业 14 级本科生
授 课 时 长：14 分钟
参 考 文 献：[1] 同济大学数学系编．线性代数（第五版）[M]．北京：高等教育出版社
[2] David C.Lay 著．线性代数及其应用(原书第 3 版)[M]．北京：机械工业出版社．

教学背景

学生熟悉了矩阵及向量空间的知识体系后，下一步需要学习用矩阵解决实际问题的方法，特征值和特征向量则是矩阵实际应用的重要基础，对计算机相关专业的学生来讲更是如此。

教学目标

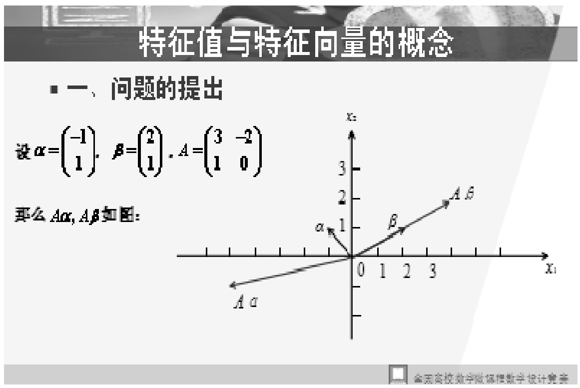
介绍特征值与特征向量的概念及其一些简单的性质，以及基本计算方法。

教学内容

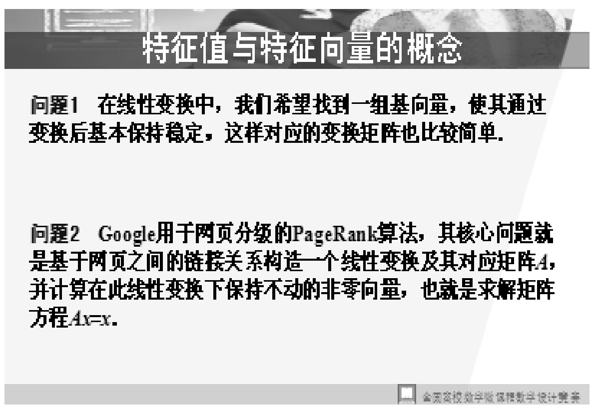
一、问题的引入

选取两个与计算机及网络相关的实例，介绍特征值的应用背景。

（1）线性变换中的比较稳定的向量。

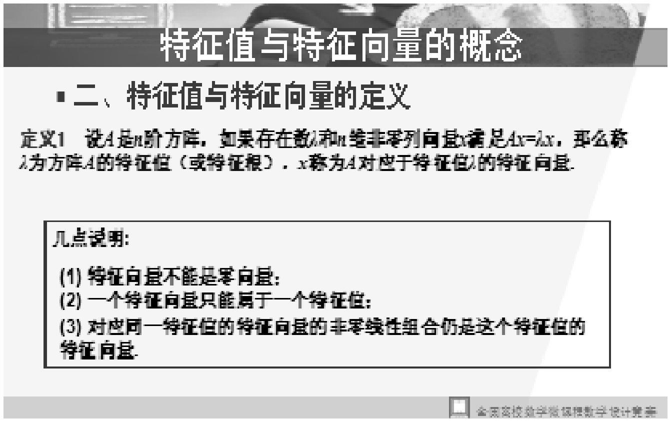


（2）特征值在 PageRank 算法中的应用。

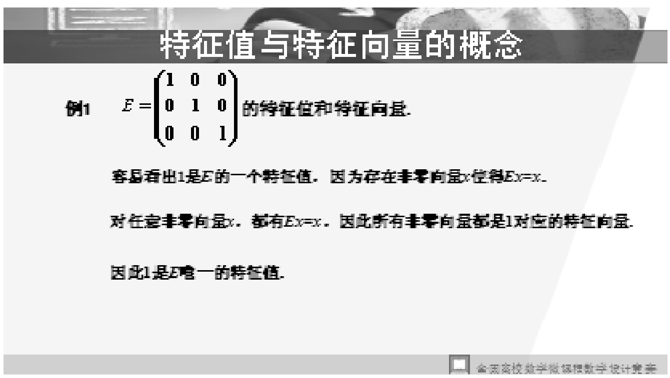


二、特征值与特征向量的概念

给出定义及几条简单性质。



例 1 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

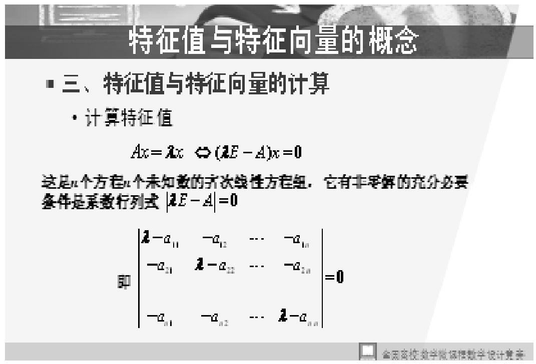


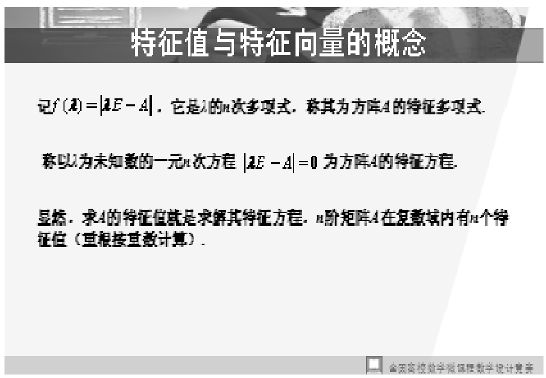
作为特殊矩阵，可以通过观察法和简单性质直接得到结果。但对于一般的方阵不可行。

已存在性描述的定义和高等数学中极限定义类似，没有直接给出计算方法。

对定义进行分析恒等变形化为$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$，这是齐次线性方程组。

特征向量要求是非零向量，因此要想有非零解就必须保证系数行列式等于 0。

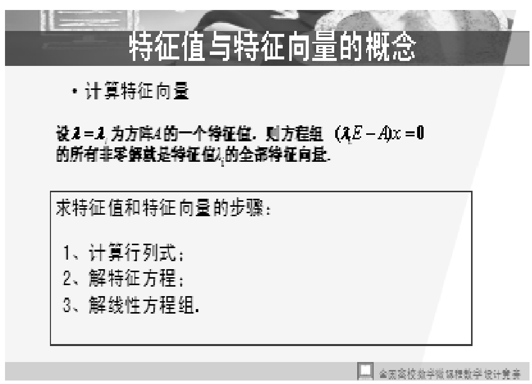




解 n 次特征方程。

解齐次线性方程组求特征向量。

求特征值特征向量的步骤如下：



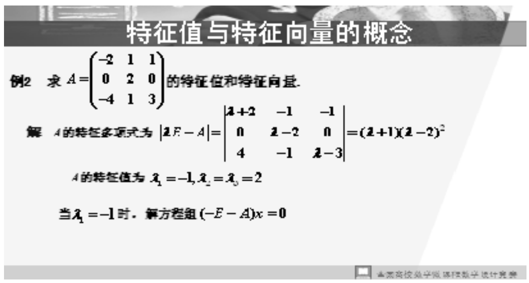
（1）计算行列式。

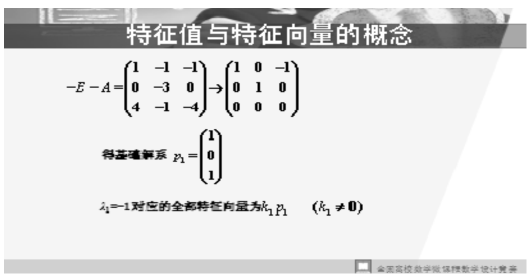
（2）解特征方程。

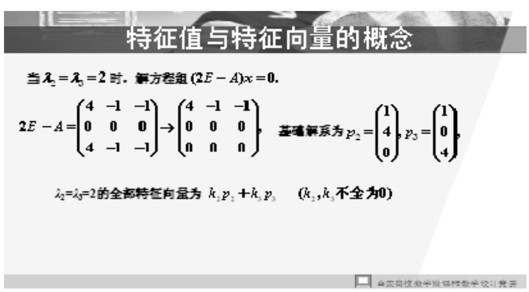
（3）解线性方程组。

相关例题：

例 2　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。







标准解题过程如下：计算行列式，求解特征方程，把系数矩阵化为阶梯型解线性方程组。

注意强调必须是非零解，以及非零解的写法。

重点：对概念的理解，基本计算方法。

难点：计算过程的理解和掌握。

教学总结：作为相似矩阵及二次型知识板块的开篇，着重打牢基础，让学生通过计算熟悉基本概念并了解一些简单的性质，为后续的特征值性质讲解打下基础。

逆矩阵

吴玉文
北京物资学院

作品标题：逆矩阵
所属课程：线性代数
相关知识点：逆矩阵
知识点编码：0204
授课对象：本科二年级
授课时长：13 分钟
参考文献：[1] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2014.
[2] 王莲花，梁志新. 线性代数[M]. 北京：化学工业出版社，2012.

一、教学目的及要求

（1）掌握逆矩阵的定义，理解伴随矩阵的概念。
（2）理解并掌握矩阵可逆的充分必要条件。
（3）能够利用矩阵与其伴随矩阵的关系求逆矩阵。

二、知识点分析

（1）**重点**：逆矩阵的定义及矩阵可逆的充分必要条件（利用板书及

PPT 中的显著颜色、显著位置，配套的例题来突出）。

（2）**难点：**利用矩阵与其伴随矩阵的关系求逆矩阵的方法（适用于三阶以下矩阵）（利用回忆、启发性的提示，引导学生抓住该方法的关键来突破）。

（3）**关键点：**伴随矩阵的概念。

三、教学方法及教学手段

（1）运用多种教学方法，课堂提问、讨论、启发、演示等方法适时进行，调动学生的学习积极性，激发学生的潜能。

（2）使用现代教育技术手段，PPT 与板书内容结合。

四、教学内容与教学设计

教学内容	设计方案及意图	教学手段	教学时间
引入：从数的乘法运算出发，以提问的方式引出逆矩阵的概念	引入可逆矩阵的概念	启发式	1 分钟
1. 定义 **第2. 3节 逆矩阵** 1、定义 对于n 阶方阵A，如果有一个n 阶方阵B， 使得 $AB=BA=E$， 则称矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A 的逆矩阵. $\boxed{A\text{的逆矩阵记作 } A^{-1}.}$ 例1 求对角矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$的逆矩阵。 解 两个同阶对角矩阵的乘积仍是对角矩阵。 令$B=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}$ 则AB=E，且BA=E 由定义知，矩阵A的逆矩阵是B，即 $\boxed{A^{-1}=B.}$	介绍本节的重点内容之一——逆矩阵的定义。 利用对角矩阵的性质，给出逆矩阵的实例，从而加强学生对于逆矩阵定义的理解记忆。	PPT 完成	4 分钟

续表

教学内容	设计方案及意图	教学手段	教学时间
注：若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的. 证明：若设 B 和 C 是 A 的逆矩阵，则有 $AB=BA=E,\quad AC=CA=E,$ 可得 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C.$ 所以 A 的逆矩阵是唯一的,即 $B=C=A^{-1}.$	通过理论推导来讨论逆矩阵的唯一性		
2. 可逆的充要条件 2.1 伴随矩阵的定义 2、可逆的充要条件 定义：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则称矩阵A^*为矩阵A的伴随矩阵. $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ 其中A_{ij}为$\lvert A\rvert$中元素a_{ij}的代数余子式 例：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$	在介绍矩阵可逆的充要条件之前，首先介绍伴随矩阵的概念，有助于后续知识的介绍；练习二阶方阵的伴随矩阵的求法	PPT 加板书共同完成	5 分钟
2.2 可逆的充要条件 定理 矩阵A可逆的充要条件是$\lvert A\rvert\neq 0$，且 $A^{-1}=\frac{1}{\lvert A\rvert}A^*$，其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵. $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ A_{ij}为$\lvert A\rvert$中元素a_{ij}的代数余子式 说明 1.可逆的条件：$\lvert A\rvert\neq 0$ 2.逆矩阵的计算：$A^{-1}=\frac{A^*}{\lvert A\rvert}$. ⟶ 伴随矩阵法 例2 求可逆矩阵$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$的逆矩阵。 解：$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{A^*}{\lvert A\rvert}=\frac{1}{\lvert A\rvert}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$ 公式法求逆 $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}$, $A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6&-2\\-5&1\end{pmatrix}$	通过前面引入的伴随矩阵，讨论矩阵可逆的充分必要条件，并相应地给出求逆矩阵的伴随矩阵法和例题。 例 2 可借用之前二阶方阵的伴随矩阵的结果继续计算，并得到求二阶方阵的逆矩阵的公式法，要求学生记忆掌握。 可逆的充要条件是本节课的一个难点，要渐近式地引导学生思考，突破难点	PPT 完成	4 分钟

五、教学反思

1. 教学预设中的成功之处

① 在教学过程中采取 PPT 与板书相交叉的讲解方式，通过逐步的计算推导过程引导学生复习巩固所学的定义性质等，同时加强对于本节重点内容的理解。

② 在学习逆矩阵的定义时，从数的乘法运算出发，以提问的方式引起学生注意：矩阵的运算中有没有乘法的逆运算呢？即引起了学生思考的兴趣，又可加深对这部分内容的理解记忆。

2. 教学预设中的不足之处

由于不同学生的学习反馈有差异，所以预设时间不能达到精确。

全概率公式

陈江荣
首都经济贸易大学

作 品 标 题：全概率公式
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：全概率公式
知识点编码：010403
授 课 对 象：各专业大二年级学生
授 课 时 长：18 分钟
参 考 文 献：盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社.

教学背景

在前面的学习中，我们掌握了一些计算事件概率的基本公式，比如古典概型概率计算公式。但是有一些问题，比如：n 个阄中 m 个有奖 $(n<m)$，甲乙两个人依次排队从中不放回地抓取一个，甲中奖的概率可以直接用古典概型概率公式计算，为 $\frac{m}{n}$，考虑乙中奖的概率时，由于甲已抓走一个阄，乙从剩余的 $n-1$ 个阄中抓出一个，这 $n-1$ 个阄是什么状态就不清楚，导致此时样本空间的描述变得未知，所以我们直接用古典概型概率公式就难以求解。因此，必须根据甲抓走的这个阄是有奖还是无奖这两种情形，将乙中奖这个事件进行分解再计算概率。这样就产生了一种新的用来直接计算概率的公式，即全概率公式。

教学目标

使同学们准确掌握全概率公式的含义，学会样本空间划分的技巧，利用全概率公式计算一些无法直接用古典概型概率公式计算的随机事件发生的概率。

教学内容

样本空间的划分的定义、全概率公式及证明、全概率公式的应用。

重点：全概率公式的含义及其证明、全概率公式的应用（解决复杂事件的概率计算）。

难点：全概率公式的含义及全概率公式的应用。

教学方法和过程

1．通过游戏引出问题

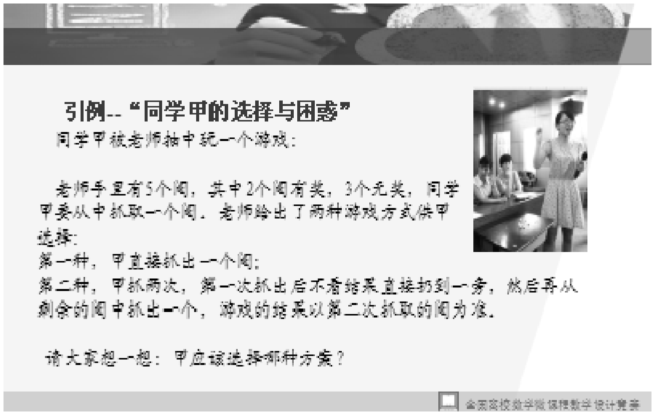
（1）甲同学遇到这样一个问题，老师让他玩一个游戏，老师手中有 5 个阄，其中 2 个有奖，3 个无奖，甲同学要从中抓取一个，有两种游戏方式可以选择：

第一种，直接抓取一个。

第二种，抓两次，第一次抓出后不看结果直接扔掉，然后再从剩余的阄中抓出一个，结果以第二次抓出的阄为准。

甲同学该如何选择呢？

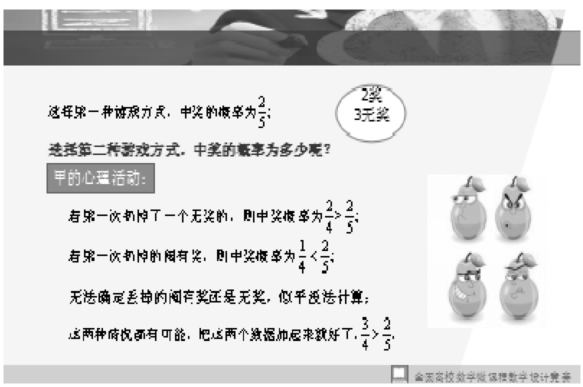
通过游戏方案的选择将问题抛给大家。



（2）启发式分析环节——再现大家的思考过程，以及他们遇到的困惑和常犯的错误。

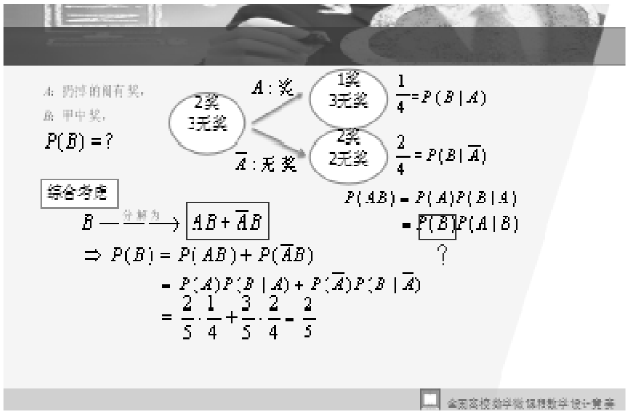
甲很清楚，第一种方式中奖的概率为2/5，而第二种方式中中奖概率为多少呢？

他首先想到，如果扔掉的阄无奖，则中奖的概率为2/4，如果扔掉的阄有奖，则中奖的概率为1/4，这时，他发现自己无法确定扔掉的阄有奖还是无奖，于是他陷入了两难的选择之中，突然，他想到，既然这两种情况不能确定哪种会发生，就表明两种情形都有可能，于是他将这两个数据求和得到概率为3/4。这个结果是大家常犯的错误。



（3）给出正确的求解过程。首先否定3/4，因为这是两个条件概率之和；然后肯定这个答案中应用的综合考虑所有情形的思想，但是不应该简单地把这两个数据求和。

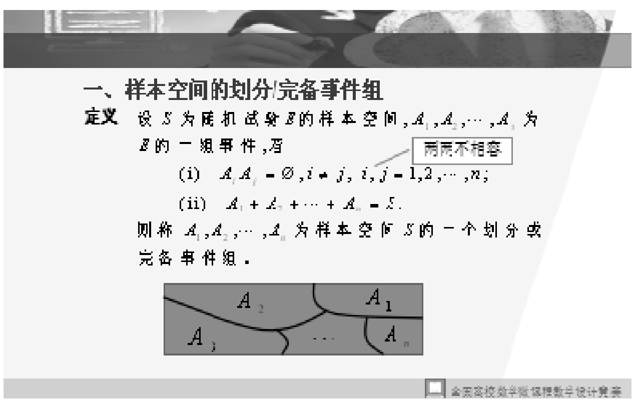
正确的做法是：将 B 分解为 AB（即 A 发生且 B 发生）与 $\overline{A}B$（A 不发生 B 发生）这两个不相容事件之和，再用加法公式及乘法公式计算得到概率值。



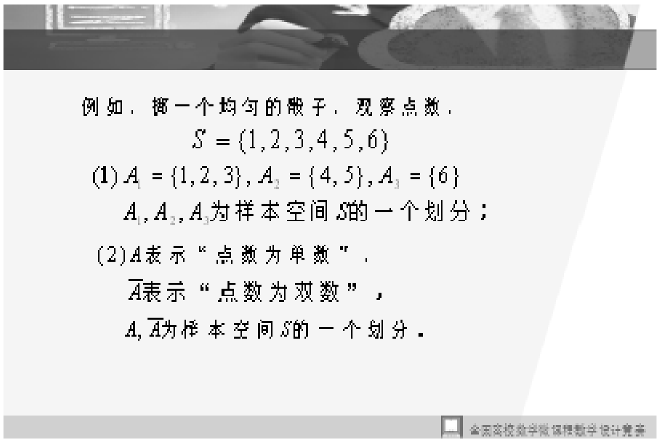
（4）引例总结，承上启下。在本例中，甲中奖的概率不容易直接计算得到，它受到 A 发生与 A 不发生两种情形的影响，我们将它们全盘考虑进来，先将事件 B 进行分解，借助 A 发生的概率，以及 A 不发生的概率计算出事件 B 发生的概率。这就是今天要学习的全概率公式的基本思想。

2．样本空间的划分/完备事件组

（1）介绍样本空间的划分的定义并解读其中两个条件的含义。

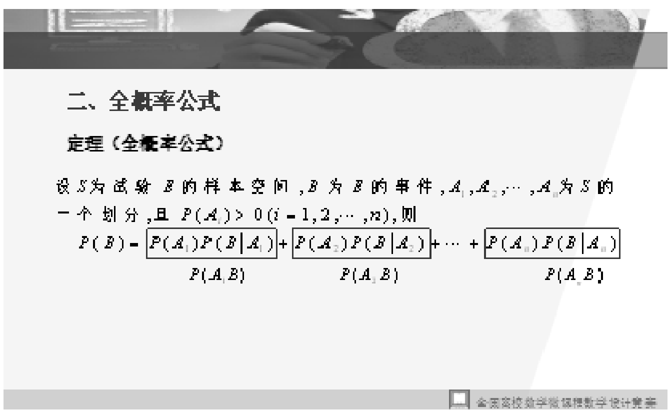


（2）给出一个样本空间，通过简单的正例及反例逐一验证样本空间的两个条件，帮助大家理解样本空间的概念。同时，通过例子让大家明白样本空间的划分是不唯一的，通常，$A,\overline{A}$ 为样本空间 S 的最简单的划分。

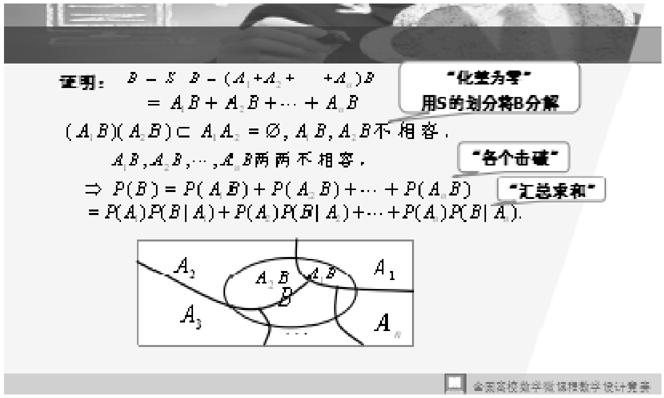


3．全概率公式及证明

（1）全概率公式的介绍及公式的简单分析。



（2）全概率公式的证明。



化整为零（借助样本空间 S 的划分将事件 B 分解为一些子事件之和）

→各个击破（用乘法公式将乘积事件发生的概率展开成为两个概率乘积）。

→汇总求和（将所有的贡献累计求和）。

（3）全概率公式的解读及注记。

为了准确掌握全概率公式并能灵活应用，我们需要解读并理解公式中的条件及结果。

条件是：$A_1,\cdots,A_n$为样本空间S的划分 。

结论是：$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$ 。

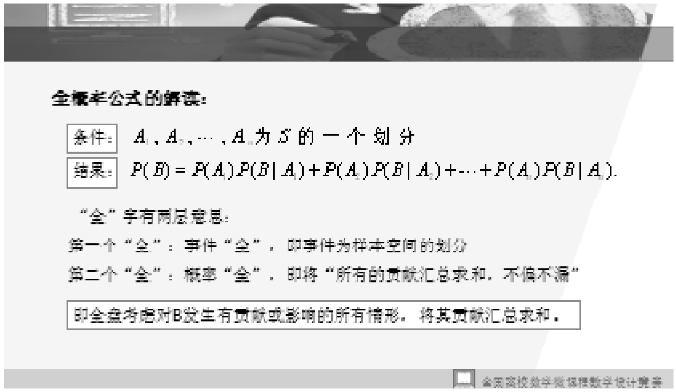
注：全概率的“全”字有两层含义。

第一层，事件全，事件组 $A_1,\cdots,A_n$为样本空间S的划分 。

第二层，概率全，即所有的概率要汇总求和。

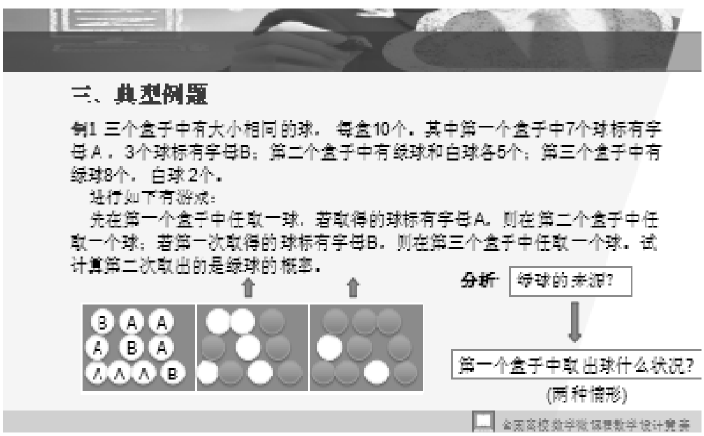
正确理解全概率公式，总结起来是一句话：

“考虑对事件 B 发生有贡献或影响的所有情形，将其贡献汇总求和。”



4．典型例题

例 1　三个盒子中有大小相同的球，每盒 10 个。其中第一个盒子中 7 个球标有字母 A ，3 个球标有字母 B；第二个盒子中有绿球和白球各 5 个；第三个盒子中有绿球 8 个、白球 2 个。



进行如下有游戏：

先在第一个盒子中任取一球，若取得的球标有字母 A，则在第二个盒子中任取一个球；若第一次取得的球标有字母 B，则在第三个盒子中任取一个球。试计算第二次取出的是绿球的概率。

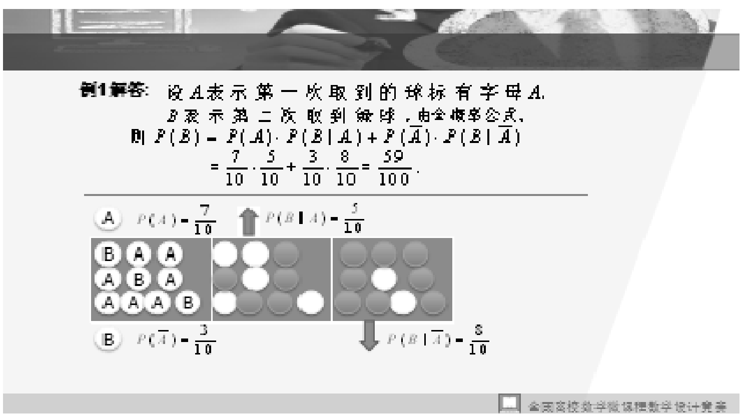
分析：

（1）第一步，先引导学生明白此例中存在的障碍：此例中绿球的来

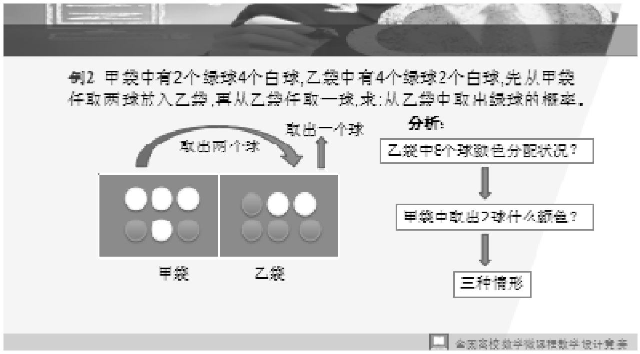
源不清楚，使得样本空间比较复杂，导致直接用古典概型概率公式无法计算。

（2）第二步，引导学生将此例中的问题与“全概率公式”联系起来：绿球可能来自第二个盒子，也可能来自第三个盒子。来自第二个盒子表明第一个盒子中取出的球标有字母 A，来自第三个盒子表明第一个盒子中取出的球标有字母 B，这样，取出绿球这个事件的发生就受到了第一个盒子中取出的球的状态的影响，这里有两种情形，而且无法确定哪种情形会发生，所以，我们需要全盘考虑，从而想到使用全概率公式。

解答：设 A 表示第一个盒子中取出的球标有字母 A，B 表示第二次取出绿球，则由全概率公式，得 $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})$。$B$ 事件发生的概率的求解问题就转移到计算 4 个概率，通过动画演示，这 4 个概率比较容易由古典概型概率公式计算，最后将数据代入上式，计算得到 $P(B)=\dfrac{59}{100}$。

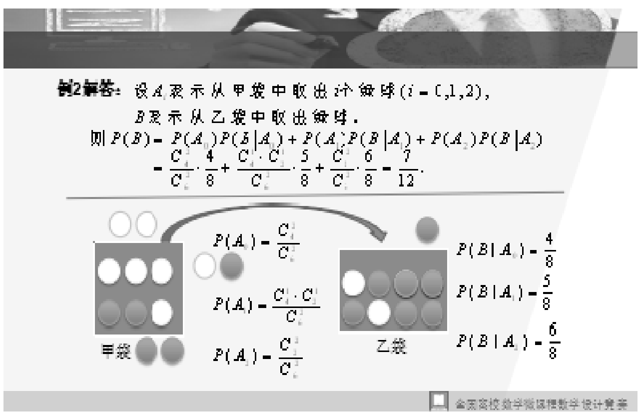


例 2　甲袋中有 2 个绿球和 4 个白球，乙袋中有 4 个绿球和 2 个白球，先从甲袋任取两球放入乙袋，再从乙袋任取一球，求：从乙袋中取出绿球的概率。



分析：当从乙袋中取球时，乙袋中的球由原先的 6 个变成了 8 个，但是这 8 个球的颜色状况未知，导致我们无法使用古典概型概率公式直接计算。由于乙袋中增加的两个球来自于甲袋，所以，乙袋中取出的绿球受到甲袋中取出的两个球的颜色的影响，这两个球的颜色有 3 种可能：两个白球、一个白球一个绿球、两个绿球，所以我们需要全盘考虑，很自然联想到全概率公式。

解答：



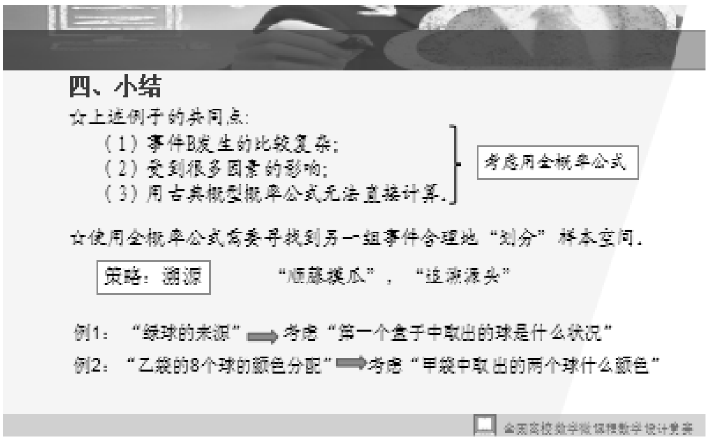
设 A_i 表示从甲袋中取出 i 个绿球(i=0,1,2)，B 表示从乙袋中取出绿球，则，

$$P(B)=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$

因此，计算 B 事件发生的概率就转移到计算 6 个概率，通过动画演示，这 6 个概率比较容易由古典概型概率公式计算，最后将数据代入上

式，计算得到 $P(B)=\dfrac{7}{12}$。

5．小结



（1）上述例子中的共性：事件 B 的发生比较复杂，受到多种情形影响，导致用古典概型概率公式无法计算，使用全概率公式能巧妙地将 B 事件发生的概率问题转移到计算其他较容易计算的概率上，很好地解决了这类事件的概率计算问题。

（2）使用全概率公式的关键点在于找到一组合理的事件划分样本空间。

样本空间的划分的寻找技巧：溯源，即“顺藤摸瓜，追溯源头”。

6．延伸与思考

生活中我们常常遇到抓阄的问题，抓阄通常有两种方式：第一种是大家围在一起一起抓，这种方式往往被人们所喜欢，感觉同时抓取自己掌握着主动权；第二种方式是排队依次抓取，人们往往容易认为排在后面的人会比较吃亏，学习了全概率公式之和，就可以对这种抓阄方式是否公平给出一个正确的回答。

将其简化为一个数学问题：

袋中有 5 个阄，2 个有奖，甲乙丙丁戊 5 人排队依次抓取，中奖概率是否相同？

甲中奖的概率为$\frac{2}{5}$，计算乙中奖的概率时，只需将样本空间分解为甲中、甲不中，然后借助全概率公式计算即可，计算丙中奖的概率时，将样本空间分解为甲中乙中、甲不中乙中、甲中乙不中、甲不中乙不中，然后再用全概率公式将其概率展开成四项求和，类似处理后面两个概率，具体的计算留给大家，计算后会发现，每个人中奖的概率均为$\frac{2}{5}$，抓阄结果与先后顺序无关，因此，排队抓阄时大家遵守秩序即可。

教学总结

全概率公式在计算一些复杂事件 B 发生的概率时非常有效，它通过样本空间的划分 $A_1,\cdots,A_n$ 将 B 分解成子事件，然后利用了加法公式和乘法公式将其展开成为 n 项之和，就可以将计算 B 事件发生的概率问题转移到计算事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的概率，以及对应的条件概率上，而这些概率往往比较简单，用古典概型概率公式就可以直接计算，这样，B 发生的概率就迎刃而解了。全概率公式看似复杂，实际上当我们抓住了样本空的划分，用它来分解事件 B，使用公式在计算概率时就极其简单而且直观。

全概率公式

陈学慧
北京科技大学

1. 基本信息

课程名称：概率论与数理统计
课程类别：公共必修课
授课对象：理工科二年级学生
先修课程：高等数学、线性代数

2. 课程简介

《概率论与数理统计》是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科，它以随机现象为研究对象，是现代数学的重要分支学科，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等各领域都起到非常重要的作用。近些年来，随着计算机科学的迅速发展，大批功能强大的统计软件和数学软件涌现出来，经典理论和现代信息技术的结合为这门学科注入了新的活力，使其在自然科学和社会科学的各个领域得到了愈加广泛的应用。

3. 主要内容

《概率论与数理统计》课程的主要内容由概率论与数理统计两大部分组成，其中，概率论是数理统计的基础，数理统计是概率论的应用。概率论部分是从数量关系角度研究自然界和社会生活中普遍存在的不确定现象，即随机现象的规律性，并为后续内容提供理论基础。数理统计部

分是从理论与实际相结合的角度研究随机现象的统计规律性，它以概率论为理论基础，根据试验或观察得到的数据来研究随机现象，对研究对象的客观规律性做出合理的估计与判断。

4．课程意义

《概率论与数理统计》课程是学习后续课程的先修课程，也是在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础。概率论与数理统计对于培养学生的综合能力，提高学生的数学素养以及整体的素质，并且为学习工作中提高科研能力和创新能力都具有重要的作用。

一、单元教学内容及目标

1．教学单元

“第一章 随机事件与概率”中的“第四节 全概率公式”。

2．教学内容

本次课主要讲授以下内容：
（1）样本空间的划分。
（2）全概率公式及其意义。
（3）全概率公式的应用——抽签模型、北京市小客车摇号政策分析。

3．教学目标

（1）**学好基础知识，**在条件概率和乘法定理的基础上，深刻理解和掌握样本空间划分的定义、全概率公式及其意义，重点掌握全概率公式的思想及主要应用。

（2）**掌握基本技能，**能够根据全概率公式“化整为零”的思想正确分析问题，进行求解。借助问题背景分析及实验，让学生认识全概率公式的特征，充分掌握“用条件概率求解非条件概率”的计算方法。

（3）**培养思维能力，**能够对研究问题进行观察、类比、抽象、概括，并提出解决方法。在学习过程中积累数学活动经验，培养学生由浅入深

地分析问题、解决问题的思维方式，锻炼学生质疑、独立思考的习惯与精神，帮助学生逐步建立正确的随机观念。

（4）**提高解决实际问题的能力**，能够自觉地用所学的知识去观察生活，通过建立简单的数学模型，解决生活中的实际问题。

4．教学意义

全概率公式是概率论这门学科中的一个非常重要的公式，实质上是加法公式和乘法公式的综合运用，主要用于计算复杂事件中因索果类问题的概率，它可以将解题过程化繁为简。同时，全概率公式也是后面相关知识的学习的基础，起到承前启后的作用。另外，虽然全概率公式本身比较简单，但它可以和很多复杂问题联系起来，具有深刻实际应用的价值，在医疗诊断、投资、保险等不确定问题中有着重要的应用。

二、单元教学重点与难点

1．教学重点

（1）理解样本空间划分的概念。

（2）掌握全概率公式的证明。

（3）掌握“概率树”工具，并灵活应用。

（4）掌握运用全概率公式解决问题的一般步骤。

2．教学难点

（1）样本空间划分的方法。

（2）全概率公式的理解。

（3）具体问题中应用全概率公式。

3．对重点、难点的处理

（1）通过对实例——抽签问题的分析，启发学生主动思考，提出问题，引出全概率公式思想，激发学生兴趣。

（2）通过举例分析，引导学生寻找样本空间划分的方法，强调划分

的两个要点，通过启发学生自主思考、主动参与，让学生体验感性认识与理性计算的差异，使学生对全概率公式有更加深刻的认识，并掌握其计算方法。

（3）学以致用，加强课堂互动，引导学生在学习过程中发现问题，思考问题，结合现实生活和科学研究中的实际应用，激发学生探究新知识、新领域的兴趣。同时对例题做深入细致的分析，层层推进。

（4）运用计算机仿真，增加内容的直观理解，提高学习的兴趣，拓展学生的知识面。

三、教学方法与策略

1．课堂教学设计思路

（1）以生动的引例——小米 LED 灯抽签问题引出本节内容，抓住学生的“眼球”，提高学生的兴趣，让学生充分了解全概率公式的产生背景（全概率公式是为了解决复杂问题中由因索果问题产生的），为整堂课奠定良好的基础。

（2）引例讲解后，重点讲一下样本空间的划分。强调划分的两点：各事件两两互不相容、所有事件的和事件是样本空间。样本空间的划分是全概率公式的关键环节，没有划分就无法使用全概率公式。所以，举两个例子，说明寻找样本空间划分的两个方法。

（3）全概率公式的重点是公式的意义，就是在样本空间划分的前提下，将概率分解到每一个原因下去考虑，由于在每个原因下发生的概率及先验概率是比较容易求得的，所以，概率的计算会变得比较简便。其思想为“化整为零”，把每个局部问题解决后，再积零为整，最终使问题得到解决。全概率公式的“全”，体现在事件的概率值，是它在各个原因下的条件概率值的加权平均值，可以理解为，是所有原因引导下，事件发生的概率。

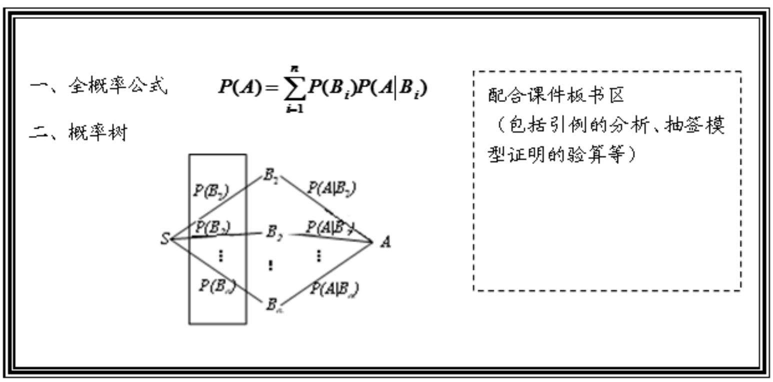
（4）本教学还设计了一个比较典型的全概率公式问题——抽签问题，是概率论中经常涉及的一个知识点。结果是抽签不分先后，中签概率完全一样。并利用两次计算机模拟，解释抽签的“公平性”和感性认识的

错误。最终，把抽签问题总结为抽签模型，让学生熟练掌握，并会自觉运用。

（5）重点例题分析。本段教学选取了一个热点的应用背景——北京小客车指标摇号问题。以问题为导向，引导学生分析问题，建立概率模型，并应用全概率公式进行求解，同时，将理论应用于实践。主要分析了三个关键问题，分别为：基准中签率是多少？如何一次完成不同阶段的“摇号”？多久可以“摇中”？在分析求解过程中，至始至终使用全概率公式，加强难点和重点的讲解。

（6）计算机模拟演示。为了让学生更好地掌握全概率公式，也为了更好地把抽签问题搞清楚，特设计了两个计算机模拟演示。之后给出计算机模拟演示，试验结果与理论概率值很接近。模拟即说明了问题，又可以增加学生学习兴趣，调动课堂气氛，所以使用模拟手段是教学的一大亮点。

2．板书设计



四、教学特点

1．以学生深层次的学习需求作为贯穿整个课程的主线

在课程的设计、讲授过程中，致力于解决“学有何用”这个问题，通过教学过程，除了完成知识的转移和传递，更进一步地告诉学生知识

的产生背景，从实际上升到理论，而后，从理论又回归到实际，即通过实际应用案例——“北京市小客车摇号”问题，让学生切实的感知到知识的“用途”，以及其应用的过程。通过实际——理论——实际这样一个往复的过程，完成了学生意识上一个螺旋式的上升，达到真正掌握知识的目的。

2．在教学过程中，采用动画展示，使抽象的数学思考过程形象化

数学问题基本上都是抽象的，因此在理解上具有一定的难度，在本节教学过程中，运用了动画展示，学生可以对解题过程有个直观的认识，增强了课程的趣味性，也提高了学生的学习兴趣。

3．将 Matlab 数学软件应用于教学过程

为发现统计规律，需要进行多次试验，这在教学过程中是较难实现的，为了在短时间进行大量重复试验，让学生能够对概率统计意义定义有更深入、直观的理解，使用 Matlab 数学软件编程，模拟抽签试验，通过程序运行使学生直观地感受到频率的稳定性。同时，向学生展示了数学软件 Matlab 的强大功能，吸引学生对课程的兴趣，拓展学生的知识视野，为后续的全校公共课《数学实验》做铺垫。

五、教学进程设计

针对每个知识点进行详细设计，具体内容如下表所示。

教学进程表

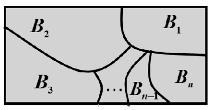
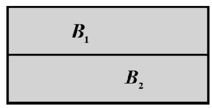
教学意图	教学内容	教学环节设计
1.问题的引入		
全概率公式的引入——抽签题	小米的产品大家都喜欢吧！图片上的小灯同学们知道吗？这是传说中的补作业神器，号称停电 “不怕怕”神灯，我这有两个，大家想要吗？可是，我只有这两个，怎么办呢，咱们来	引入一个有意思的例子，与学生互动，启发学生思考。首先，

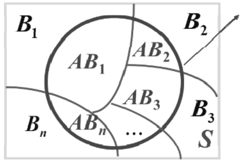
续表

<table>
<tr><th>教学意图</th><th>教学内容</th><th>教学环节设计</th></tr>
<tr><td></td><td>抽签吧。谁先抽？(提问)先抽吃亏，还是后抽吃亏？

</td><td>提问先举手的同学，问他为什么选择先抽呢？接下来提问一个没有举手的同学，是不是觉得后抽占便宜呢？</td></tr>
<tr><td></td><td>将该问题抽象成如下概率问题：
10 张同样的卡片只有 2 张上印有“神灯”，其余的什么也没写，将其洗匀，“无放回”依次抽取.
问：后抽的人比先抽的人吃亏吗?
分析 设 事件 A_1——第 1 个人抽到“神灯”
事件 A_2——第 2 个人抽到“神灯”
则：$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1)=\frac{2}{10}$ ，$\boldsymbol{P}(\overline{A_1})=1-\frac{2}{10}$
$(\boldsymbol{A}_2)$=? 如何求呢？如果第一个人抽中，第二个人抽中的概率为$\frac{1}{9}$，如果第一个人没有抽中，第二个人抽中的概率为$\frac{2}{9}$，那 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2)$为多少呢？进一步分析，$A_2$的发生必然伴随且仅伴随着 A_1，$\overline{A_1}$之一同时发生，得如下：
$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A_2)&=\boldsymbol{P}((A_1\cup\overline{A_1})A_2)\\ &=\boldsymbol{P}(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2)=\boldsymbol{P}(A_1A_2)+\boldsymbol{P}(\overline{A_1}A_2)\\ &=\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2\mid A_1)+\boldsymbol{P}(\overline{A_1})\boldsymbol{P}(A_2\mid\overline{A_1}) \end{aligned}$$
注意到$(A_1\cup A_2)=S$
将 A_1，$\overline{A_1}$ 称为 S 的一个划分。将该式推广就是我们这节课要介绍的全概率公式，在介绍全概率公式之前，我们来复习一下乘法定理</td><td>在上课开始，用这样的方法吸引学生的注意力，整理学生的注意力，为后续课程推进奠定基础</td></tr>
</table>

续表

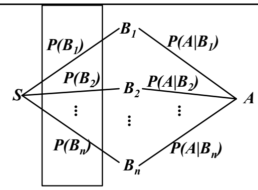
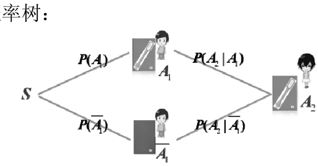
<table>
<tr><th>教学意图</th><th>教学内容</th><th>教学环节设计</th></tr>
<tr><td colspan="3">2.样本空间的划分</td></tr>
<tr><td>样本空间的划分</td><td>定义　设 S 为试验 E 的样本空间，$\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2},\cdots,\boldsymbol{B_n}$，为 E 的一组事件, 若：
(1) $\boldsymbol{B_i B_j}=\emptyset$，$\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots,\boldsymbol{n}$
(2) $\boldsymbol{B_1}\cup\boldsymbol{B_2}\cup\cdots\cup\boldsymbol{B_n}=\boldsymbol{S}$，
则称$\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2},\cdots,\boldsymbol{B_n}$是样本空间 S 的一个划分。
</td><td>从引例中，已经看到样本划分的作用。

样本空间划分的两个要点：互不相容、不能遗漏。同时强调，同一样本空间可以找到不同的划分，为后续抽签问题的讲解做铺垫</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. 全概率公式</td></tr>
<tr><td>全概率公式</td><td>设 1）S 试验为 E 的样本空间，$A\subset S$;
2）$\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2},\cdots,\boldsymbol{B_n}$是样本空间 S 的一个划分，且
$$P(B_i)>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$
则
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$
证明：$\because A=AS=A(B_1\cup\cdots\cup B_n)=AB_1\cup\cdots\cup AB_n$
且 $AB_1,\cdots,AB_n$ 两两不相容，所以
$\therefore P(A)=P(AB_1)+\cdots+P(AB_n)$
$=P(B_1)P(A|B_1)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n).$

板书全概率公式的概率结构图：</td><td>讲解全概率公式。

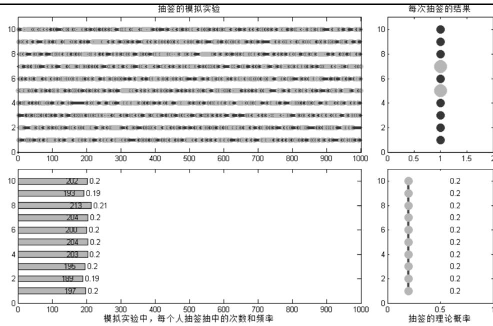
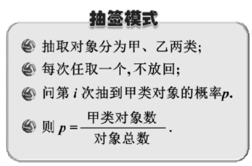
这个证明不难，用到概率可加性和乘法定理。

重点是全概率公式的思想，划分的意思是化整为零，计算出每一个乘积事件概率是各个击破，最后求和是目的</td></tr>
</table>

续表

教学意图	教学内容	教学环节设计
		
4. 全概率公式应用实例		
应用一 抽签问题	•抽签问题 10 张同样的卡片只有 2 张上印有“神灯”，其余的什么也没写，将其洗匀,“无放回”依次抽取.  问：后抽的人比先抽的人吃亏吗? 解：设事件 A_i——第 i 个人抽到“神灯” 事件 $\overline{A_i}$——第 i 个人未抽到“神灯”, i=1,2,⋯,10. 则： $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\|\overline{A}_1)$ $=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{10}.$ A_2 对应的概率树： 	利用全概率公式完成引例-抽签问题。 结合前面讲授的划分的选择，简化解题过程，引导学生分析问题，给出抽签问题一般性结论的全概率公式方法的证明
应用一 计算机模拟	•计算机模拟 右下图：为 10 人抽签（2 个签）的理论概率值 右上图：为一次试验的模拟图。红色代表没有抽中，绿色代表抽中。 左上图：共模拟了 1000 次试验结果，每一纵列是一次试验结果。 左下图：每个人在 1000 次模拟中夺冠的累积次数和累积频率，可以从数据中看出，每个选手夺冠的累积频率值在 0.2 附近，与理论概率值非常接近，也说明抽签是公平的	计算机模拟可以给学生打开另一个看问题的方式。 概率是用试验来研究随机现象的，而计算机又可以通过随机点描述一个试验的结果。

续表

教学意图	教学内容	教学环节设计
		模拟的目标是，可以全面地看出抽签结果的等可能性，又可以认识到，频率与概率值是非常接近的
应用一 抽签模式	• 抽签问题模式 将抽签问题概括一下，有如下抽签模式。 	一个问题是不是抽签问题，只要明确什么是抽签模式，就可以分辨出什么是抽签问题
应用二 小客车指标摇号问题描述	• 小客车指标摇号问题 大家有驾证吗？摇过号没有？摇号问题被评为 2014 年北京最难的事儿之一，小客车摇号的原则是公开公平公正，2014 年为了让“久摇不中”者中签，提出了阶梯中签率，规则为：第一阶段（累积摇号 24 以内）执行基准中签率，第二阶段（累积摇号 25~36 次）执行 2 倍基准中签率，第三阶段（累积摇号 37~48 次）执行 3 倍基准中签率。 	实际问题引入，目的是提高学生学习的兴趣，同时了解用全概率公式也能解决实际问题

续表

<table>
<tr><th>教学意图</th><th>教学内容</th><th>教学环节设计</th></tr>
<tr><td></td><td>


但是，很多人对基准中签率产生了误解，认为阶梯中签率是“一种忽悠”。

下面我们用全概率公式来解读一个这个政策
</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">应用二
求基准
中签率</td><td>
• 求基准中签率

截止到 2015 年 2 月 8 日，普通小客车指标申请人共有 227.5 万，将共同竞争 1.84 万个指标，第一、二、三阶段人数分别为 170 万人、40.3 万人和 17.2 万人.

求: 当期基准中签率是多少?

分析：设当期基准中签率为 r

A——一人中签

B_i——第 i 阶段的人 i=1,2,3

则：

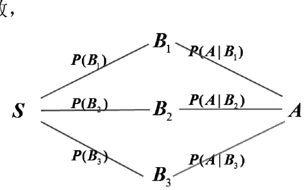
$$P(B_1)=\frac{170}{227.5} \quad P(B_2)=\frac{40.3}{227.5} \quad P(B_3)=\frac{17.2}{227.5}$$

由抽签原理得：

$$P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1.84}{227.5}$$

欲求：

$$r=P(A\mid B_1)$$
</td><td>设计问题，逐步解读政策，这个分析过程通过提问，与同学一起完成</td></tr>
<tr><td>
解：不难看出 B_i（i=1,2,3）是样本空间的一组划分，所以画出如下概率数，



根据全概率公式得：
</td><td>重现全概率公式的解题过程，不断加深学生对本节课的难点和重点的掌握</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学意图</th><th>教学内容</th><th>教学环节设计</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$
$$=\frac{170}{227.5}\times r+\frac{40.3}{227.5}\times 2r+\frac{17.2}{227.5}\times 3r$$

又因为：

$$P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1.84}{227.5}$$

所以解得：

$$r=\frac{1.84}{170+40.3\times 2+17.2\times 3}=0.0061$$

与实际情况对比，结果相同。

北京晨报网首页 > 汽车 > 热点新闻 > 正文

北京购车摇号指标中签难度再创新高 基准中签率0.6%

2015-02-26 07:59 文章来源：北京晨报 我要评论 扫描到手持设备 字号：T T

核心提示：今日，本年度首期购车指标摇号结果将公布。

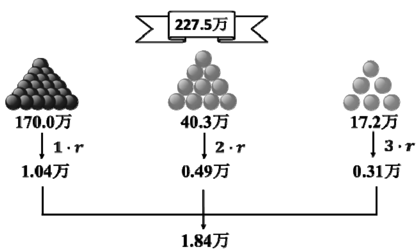
今日，本年度首期购车指标摇号结果将公布。根据昨日小客车指标办发布的数据显示，本期普通车指标中签难度再创新高，基准中签率仅为0.6%，而新能源车本期能提供4526个个人指标，是历次指标最多的一次，这意味着，2139位申请者本期无需摇号能够直接获得指标。

</td><td></td></tr>
<tr><td>应用二
阶梯中签率的实际操作</td><td>

• 阶梯中签率的实际操作

阶梯中签率应如何操作呢？常规考虑，可以将参与抽签的人（227.5 万），根据规则，分为 3 组，然后，根据每组人数和中签率，分配指标，如下图所示，这样相当于抽了 3 次，请同学们思考，如何设计实验使得一次抽签即可达到相同目标

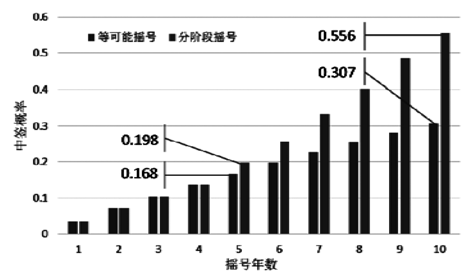
</td><td>理论计算后，再回到现实，如何指导现实的实验设计呢</td></tr>
<tr><td></td><td>



实际操作中，可将第 1 阶段的人分配 1 个申请号，第 2 阶段的人分配 2 个申请号，第 3 阶段分配 3 个申请号，相当于将在中签率上的系数，“跑到”申请号上，如此摇号，一次性即可完成阶梯抽签，这正与全概率公式计算的基准中签率相吻合

</td><td>通过 PPT 动画来呈现 1 次抽签实验的过程，并解读现实中的操作规则，让问题从实际来，再回到实际中去</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学意图</th><th>教学内容</th><th>教学环节设计</th></tr>
<tr><td></td><td>$r=\dfrac{1.84}{170+40.3\times 2+17.2\times 3}=0.0061$</td><td></td></tr>
<tr><td>应用二
多久可以
“摇中”</td><td>• 多久可以“摇中”
“阶梯中签率”政策到底有没有照顾“久摇不中”者呢？下面画出等可能摇号与分阶段摇号中签概率对比图：


从图中可以看出，根据摇号规则，前 4 年中签率是一样的，从第 5 年开始，分阶段中签的可能性逐步提高，到第 10 年时，超过等可能摇号 24.9%，可见分阶段摇号的确照顾了“久摇不中”者.
思考：在当前条件下，摇多久可以确保以 90%的可能性“摇中”</td><td>结合乘法原理，解释多久可以摇中，以及阶段摇号的确照顾了“久摇不中”者。教会学生使用图标工具分析问题的方法</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. 小结与思考拓展</td></tr>
<tr><td rowspan="3">小结、设问来加深学生对本节内容的印象，并引导学生对下节课要解决的问题进行思考</td><td>• 小结
（1）给出了样本空间划分的定义及求法。
（2）给出了全概率公式的定义及意义。
（3）给出并证明了全概率公式。
（4）给出了全概率公式的应用实例</td><td>根据本节讲授内容，做简单小结</td></tr>
<tr><td>• 思考拓展
（1）用全概率公式完成抽签模型的严格证明？
（2）划分中的互斥条件失效后，全概率公式还能用吗？
（3）用全概率公式分析世界杯 32 支代表队夺冠的概率各多少？
（4）全概率公式的逆问题是什么？由结果如何分析原因</td><td>根据本节讲授内容，给出一些思考拓展的问题</td></tr>
<tr><td>• 作业布置
习题一 A：10，11</td><td>要求学生课后认真完成作业</td></tr>
</table>

六、教学总结

本单元的教学设计符合理工科二年级学生的认知规律和实际水平，由动画展示、计算机仿真模拟、现实数据检验等营造出的轻松活跃的教学氛围将非常有效地激发学生的学习兴趣，加深学生的学习印象，有助于学生掌握本节课的学习内容。例如，日常中经常用到的抽签原理，并用 Matlab 模拟抽签结果并分析感性认识的误区，还是比较有新意的。在小客车摇号问题中，不断加强全概率公式应用的重点，并结合实际问题，用概率的眼光去发现研究。通过对实例的分析，意在培养学生自觉主动地用课堂上学到的思想去分析实际问题。培养学生的数学素养，是每一个数学教师的责任和追求。

七、教材与参考资料

1．教材

[1] 范玉妹,汪飞星,王萍,等. 概率论与数理统计(第 2 版)[M].北京：机械工业出版社,2012.

[2] 范玉妹,汪飞星,王萍,等. 概率论与数理统计全程指导(第 2 版)[M].北京：机械工业出版社,2012.

2．参考资料

[1] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计(第四版)[M].北京：高等教育出版社,2010.

[2] YB Jiang, WJ Yang. An approach based on theorem of total probability for reliability analysis of RC columns with random eccentricity[J]. Structural Safety,2013,41(3):37-46.

[3] 李全忠,刘长文,王希超. 全概率公式的不足与改进[J].大学数学,2011,27(2): 173-176.

[4] H E Kubik. Annual Extreme Lake Elevations by Total Probability Theorem[J]. Journal of Great Lakes Research, 1992,18(1):23-40.

[5] 骆汝九.利用全概率公式讨论抽签的公平性[J].南京经济学院学报,1998,5:37-38.
[6] 马晓丽,张亮. 全概率公式的推广及其在保险中的应用[J].高等数学研究,2010,13(1):70-71.
[7] 符方健. 广义全概率公式[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2008,29(3): 234-237.

贝叶斯公式

傅莺莺
北京工商大学

作 品 标 题：贝叶斯公式
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：条件概率、全概率公式
知识点编码：010404
授 课 对 象：理工科、文科二年级学生
授 课 时 长：15 分 13 秒
参 考 文 献：[1] 盛骤，等. 概率论与数理统计(第 4 版)[M]. 北京：高等教育出版社. 2008.
[2] 杨静，等. 贝叶斯公式的几个应用[J]. 大学数学. 2011, 27(2).
[3] Ronald EW, Essentials of Probability & Statistics for Engineers & Scientists [M]. 北京：机械工业出版社. 2013.

教学背景

贝叶斯公式是条件概率的重要公式，在统计学中意义重大。掌握贝叶斯公式的应用、理解贝叶斯统计推断思想，对提高学生的数学能力和素养意义重大。

教学目标

（1）掌握贝叶斯公式的推导与应用。
（2）理解贝叶斯统计推断的思想。

能力目标

培养学生运用概率的思维，尤其是从条件概率的角度出发，分析解决问题的能力。

教学内容

贝叶斯公式及其应用。

重点难点分析

重点：贝叶斯公式的推导、应用。
难点：掌握 $P(B|A)$与 $P(B)$、$P(A|B)$的区别。

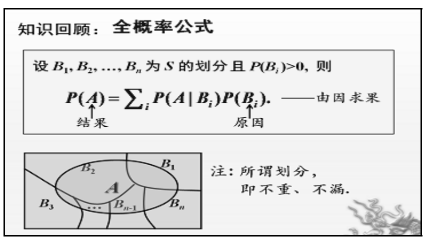
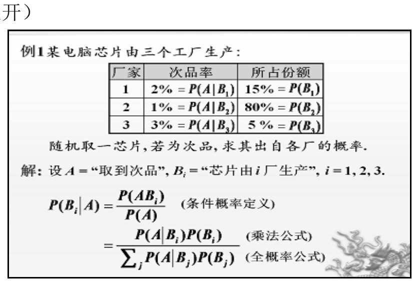
教学方法和过程（详见附表）

（1）问题引入：由里根遇刺案提出问题，在 CAT 扫描脑萎缩的条件下患精神病的概率有多大？
（2）知识回顾：复习划分及全概率公式。
（3）公式导出：通过工厂次品例题的解答，引出贝叶斯公式。
（4）解释公式：揭示贝叶斯公式的作用、形式特征与本质思想。
（5）问题解决：求 P（患精神病|脑萎缩），脑萎缩检查对诊断精神病有效吗？
（6）小结与作业：结合贝叶斯公式的主题，启示同学们总结过去，把握现在，创造美好明天。

教学总结

问题导入、前后呼应、环环相扣、层层深入；演示生动、互动活跃。

附表：教学方法和过程

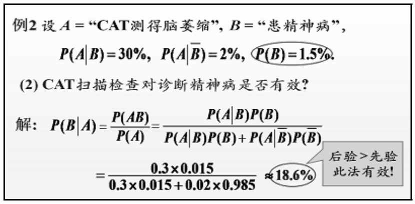
教学步骤	教学内容与互动	呈现方式	教学方法
1．问题引入：由里根遇刺案提出问题（1 分 30 秒）	 互动：仅凭 CAT 扫描脑萎缩，推断凶手患病，可靠吗	PPT 动态放映照片回忆历史事件，激发学生学习兴趣	案例教学
2．知识回顾：复习划分及全概率公式（40 秒）		PPT 动态呈现图形公式，强化印象	温故知新
3．公式导出：通过工厂次品例题的解答，引出贝叶斯公式（3 分钟）	互动：已知取到次品，怎样计算其出自各厂的概率？（用条件概率定义、乘法公式、全概率公式逐步展开）  完成计算，引出贝叶斯公式。	PPT 动态演示逐步计算过程	温故知新、引导发现

续表

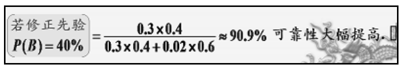
<table>
<tr><th>教学步骤</th><th>教学内容与互动</th><th>呈现方式</th><th>教学方法</th></tr>
<tr><td></td><td>
例1 某电脑芯片由三个工厂生产：
<table>
<tr><th>厂家</th><th>次品率</th><th>所占份额</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2% = $P(A|B_1)$</td><td>15% = $P(B_1)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1% = $P(A|B_2)$</td><td>80% = $P(B_2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3% = $P(A|B_3)$</td><td>5 % = $P(B_3)$</td></tr>
</table>
随机取一芯片，若为次品，求其出自各厂的概率.
解：设 A =“取到次品”，B_i =“芯片由 i 厂生产”，$i=1, 2, 3$.
$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$
计算得 $\begin{cases}P(B_1|A)=24\%,\\P(B_2|A)=64\%,\\P(B_3|A)=12\%.\end{cases}$
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. 解释公式：揭示贝叶斯公式的作用、形式特征与本质思想
（2 分 30 秒）</td><td>
贝叶斯公式 设 $B_1, \ldots, B_n$ 为 S 的划分且 $P(B_i)>0$，则
$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$
原因　结果

贝叶斯(1702-1761)
注：1.此式可以由果求因；
2.此式又称逆概率公式；
3. $P(B_i)$ 先验概率 $\xrightarrow{\text{样本信息}A}$ $P(B_i|A)$ 后验概率
应用：谁是凶手？垃圾邮件识别
</td><td>PPT 动态呈现公式及注记</td><td>追根溯源：由表及里、揭示本质、联系实际</td></tr>
<tr><td>5. 问题解决：求 P(患精神病|脑萎缩)，脑萎缩检查对诊断精神病有效吗？
（6 分钟）</td><td>
互动：欣克利患精神病的概率到底有多大？
例2 设 A =“CAT测得脑萎缩”，B =“患精神病”，
$P(A|B)=30\%$，$P(A|\overline{B})=2\%$，$P(B)=1.5\%$.
(1)求 $P(B|A)$.
解：$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}=\frac{0.3\times0.015}{0.3\times0.015+0.02\times0.985}\approx18.6\%$$
互动：若 $P(A|B)$=99%，直觉上 P(B|A)是不是很大？
若假设 $P(A|B)=99\%$，$P(A|\overline{B})=2\%$
$$=\frac{0.99\times0.015}{0.99\times0.015+0.02\times0.985}\approx43.0\%$$
结论：直觉有时并不可靠，学习数学有助于明辨是非。
互动：能否因为 $P(B|A)$较小，认为 CAT 扫描无用？
</td><td>PPT 动态呈现假定及计算结果</td><td>案例教学、启发式教学：联系实际、层层深入、挖掘问题</td></tr>
</table>

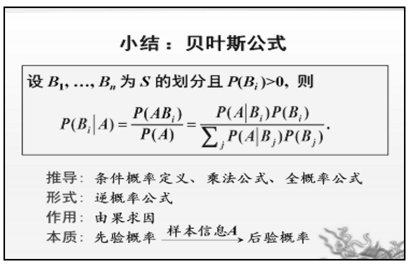
续表

<table>
<tr><th>教学步骤</th><th>教学内容与互动</th><th>呈现方式</th><th>教学方法</th></tr>
<tr><td></td><td>


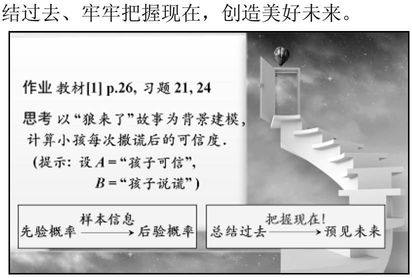
互动：怎样更有效地利用 CAT 诊病，即提高 $P(B|A)$？

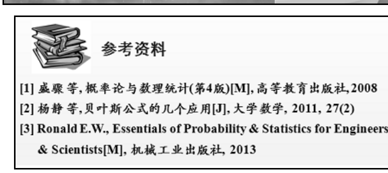


结论：修正先验概率能够大幅提高诊断的可靠性，这就是生活中确诊重大疾病前需作多次检查的原因
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6.小结与作业：结合贝叶斯公式的主题，启示同学们总结过去、把握现在、创造美好明天
（1 分 30 秒）</td><td>
小结：凝练成八个字——推导、形式、作用、本质。



启示：贝叶斯公式中，先验概率是基础、样本信息是关键，由此才能预见后验概率。提醒同学们要善于总结过去、牢牢把握现在，创造美好未来。





</td><td>PPT 动态呈现文字图片</td><td>总结教学、强调重点、联系实际</td></tr>
</table>

贝叶斯公式

谭家博
北京物资学院

作 品 标 题：贝叶斯公式
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：贝叶斯公式
知识点编码：010404
授 课 对 象：经管类大学二年级同学
授 课 时 长：15 分 49 秒
参 考 文 献：李念伟，王凤英. 概率论与数理统计[M]. 北京：化学工业出版社.

教学背景：

本课程授课对象为经管类大学二年级学生，通过前面的学习，学生已经掌握概率定义、条件概率公式、乘法公式、全概率公式等前导知识。

教学目标：

学生理解贝叶斯公式的本质，掌握贝叶斯公式的推导过程，了解贝叶斯公式的几何意义，能够运用贝叶斯公式进行计算相关概率，清楚计算中的难点，了解贝叶斯公式在其他领域中的应用。

教学内容：

贝叶斯公式的本质；贝叶斯公式的推导过程；贝叶斯公式的几何意义；运用贝叶斯公式计算相关概率；贝叶斯公式在其他领域中的应用。

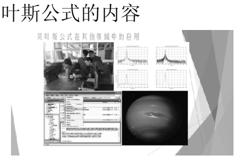
重点：

贝叶斯公式的推导过程；运用贝叶斯公式计算相关概率。

难点：

运用贝叶斯公式计算相关概率。

教学方法和过程设计：

教学版块	时长	教学过程	教学方法设计
问题引入	4 分 56 秒	利用教学道具，提出问题，在解决问题的过程中引出贝叶斯公式的内容 	1.运用教学道具，引出问题，激发学生学习兴趣； 2.采用互动式教学模式。用问题作导向，在学生回答的基础上讲解问题。在讲解问题的过程中，让学生靠近讲台，以便及时观察学生反应，达到充分的互动。在推导过程中，故意将特别需要注意的地方写错，以引起学生对此处的注意； 3.将问题拓展，与高等数学知识点综合应用解题。将问题（硬币十连正）拓展到新问题（硬币二十连正），并运用高等数学的数列极限知识进行讲解，增加学生的知识宽度和知识点之间的综合应用能力
贝叶斯公式讲解和推导	3 分钟	在例题的计算过程基础上，推导出贝叶斯公式。讲述贝叶斯公式的本质和运用贝叶斯公式时的注意事项，介绍贝叶斯公式的几何意义	1.运用板书推到公式，结合板书，强调公式的本质和注意事项； 2.采用互动式教学模式。在介绍贝叶斯公式几何意义时，请学生参与画图，调动学生积极性

续表

教学版块	时长	教学过程	教学方法设计
贝叶斯公式在其他领域中的应用	7分4秒	练习贝叶斯公式，详细介绍贝叶斯公式在医学中的应用。简单介绍贝叶斯公式在其他几个领域中的应用	1.运用板书练习贝叶斯公式，讲解贝叶斯公式在医学中的应用，并拓展性地说明计算结果可以安抚疑似病人，可以证明试验有效性，漏查率低以及二次检查的必要性等； 2.运用PPT，简单介绍贝叶斯公式在其他领域的应用，激发学生进一步学习的兴趣
总结	49秒	总结本节课主要内容	教师讲述

教学总结：

本节课运用板书，适当结合 PPT，讲解了贝叶斯公式的推导过程、贝叶斯公式的本质和其几何意义。结合例题，演示了贝叶斯公式的计算步骤和注意事项，并介绍了贝叶斯公式在其它领域中的应用。

本节课的教学手法主要为：（1）运用道具、问题导向的启发式教学；（2）拉近师生距离的互动式教学；（3）综合运用高等数学、医学等各学科知识的拓展式教学。

数学期望的概念和意义

刘玉婷
北京交通大学

作 品 标 题：数学期望的概念和意义
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：期望的概念
知识点编码：040101
授 课 对 象：大二工科（非数学专业）学生
授 课 时 长：15 分 08 秒
参 考 文 献：北京交通大学概率统计课题组. 概率论与数理统计[M]. 北京：科学出版社.

教学背景：

学生通过前三章的学习，已经掌握了一维和多维随机变量及其分布函数的定义和性质。但在解决实际问题时，分布函数不够直观明了，因此，在第四章引入了随机变量数字特征的概念。本方案针对第一类数字特征，主要介绍数学期望的概念。

教学目标

以实际问题为引例，使学生理解数学期望的定义和物理意义，掌握如何利用期望解决诸如两个分布对比的问题。

教学内容及重点难点分析

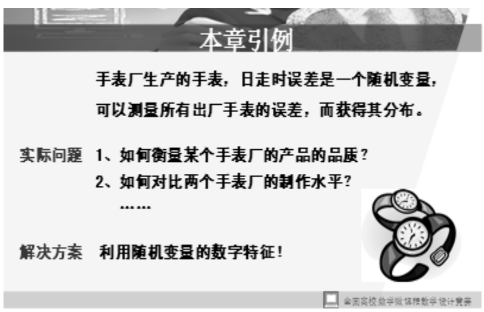
教学内容包括：期望概念的引入、离散型随机变量期望的定义、连续型随机变量期望的定义、期望应用举例和期望的统计意义。

教学重点是期望的计算公式及实际应用。

教学难点是理解期望这一概念的引出及物理意义。

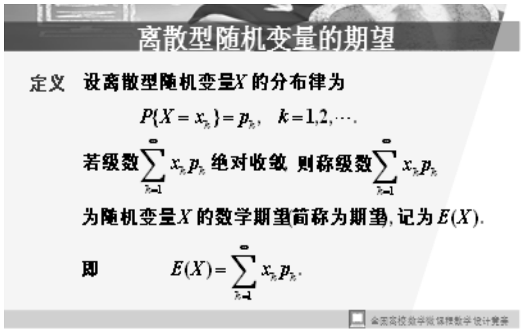
教学方法和过程

以解决实际问题为出发点，引导学生思考如何解决诸如分布函数不够直观等问题，引出随机变量数字特征的概念，强调其重要性。

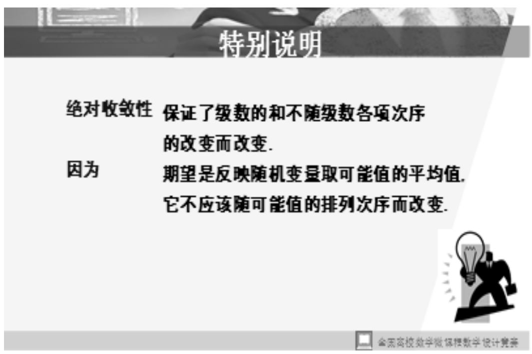


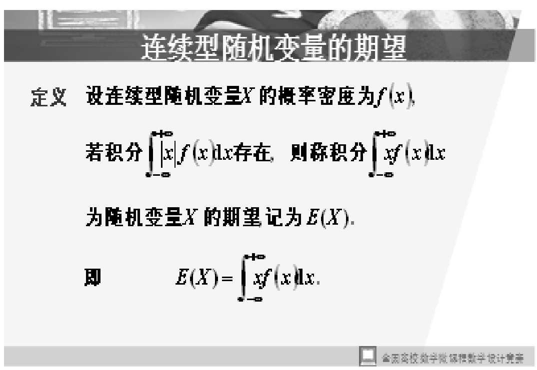
仍然以实际问题为入口，从学生熟知的一个计算公式推导出离散型随机变量数学期望的定义，使学生理解数学期望的产生背景和直观意义。

误差(秒)	−2	−1	0	1	2	3	4
甲厂只数	3	10	17	28	21	16	5
乙厂只数	6	8	32	13	14	20	7

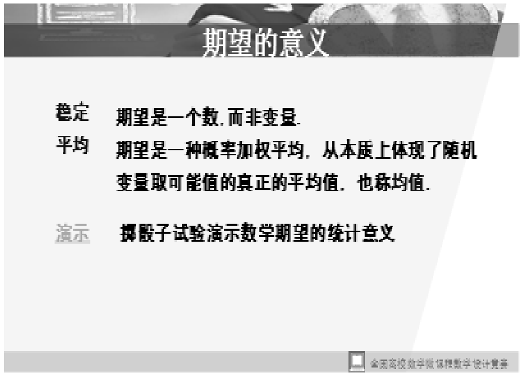


将离散型随机变量期望的概念推广到连续型随机变量上，解释绝对收敛和绝对可积的原因。

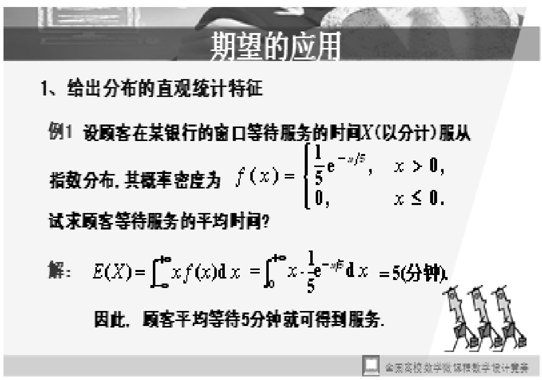


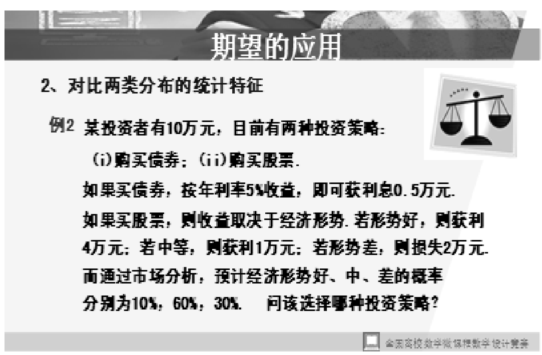


利用演示试验形象地展示期望的统计意义，使学生加深理解之前的推导过程。



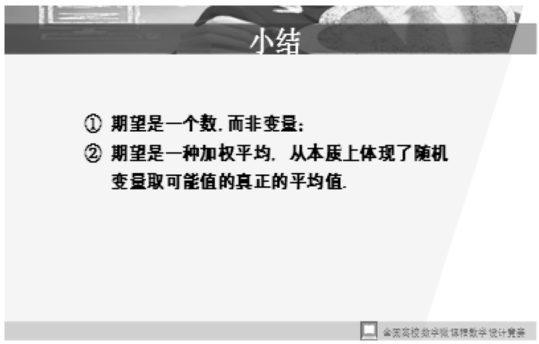
利用例题再次强调可以应用期望的概念而解决的实际问题，呼应课程一开始的设问，加深学生对期望的理解。





教学总结

由实际问题始，到实际问题终，围绕着期望的定义及应用，阐明了期望概念导出的意义和过程，使学生在理解了背景和物理意义的基础上，掌握了这一数字特征。



极大似然估计法

徐志洁
北京建筑大学

作 品 标 题：极大似然估计法
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：极大似然估计的概念
知识点编码：050202
授 课 对 象：高等学校工科类专业学生
授 课 时 长：6 分钟
参 考 文 献：张艳，程士珍. 概率论与数理统计[M]. 北京：石油工业出版社，2012.8.

教学背景：

根据样本的信息对总体进行统计推断是概率统计的基本问题之一，其中一个重要的方面是对总体分布中的未知参数进行估计，本节介绍一种常用的参数估计方法：极大似然估计法。

教学内容：

极大似然估计法。

教学目标：

通过本节课程的教学，使学生：

（1）明确极大似然估计法是在总体分布类型已知的条件下，一种常用的参数估计方法。

（2）理解极大似然估计的思想。

（3）掌握极大似然估计的概念和原理。

教学重点：极大似然估计的思想、极大似然估计的原理。

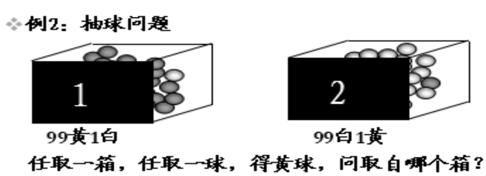
教学难点：对极大似然估计的思想的阐述。

教学方法：讲授和试验。

教学过程：引例 1：猎人和同学打猎，猜测是谁打中了兔子。

通过本例引出极大似然估计的思想：用“看起来最像的”去估计。

引例 2：抽球问题。



通过该试验，说明什么是“看起来最像的”，使学生进一步体会极大似然估计的思想。

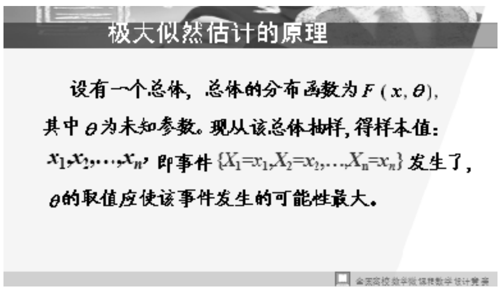
一、极大似然估计的基本思想

概率大的事件最有可能发生，在一次试验中，一个事件发生了，一

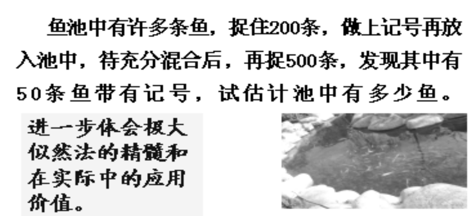
般认为试验条件对该事件的发生有利，即使该事件发生的可能性最大。

二、极大似然估计的原理

通过抽样，得到了总体的一个样本，根据极大似然的思想，认为总体分布中未知参数的取值应使该样本出现的可能性最大。因此，定义似然函数，参数的极大似然估计问题归结为在参数的取值范围内求似然函数的最大值点问题。



思考题：通过抽样，利用极大似然估计法，估计水池中鱼的数目。



教学总结：

（1）极大似然估计的基本思想。

（2）极大似然估计的原理。

切比雪夫不等式

李亚杰
北京邮电大学

作品标题：切比雪夫不等式
所属课程：概率论与数理统计
相关知识点：方差、大数定律、概率不等式
知识点编码：040204
授课对象：本科生
授课时长：13 分钟
参考文献：浙江大学. 概率论与数理统计（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社.

一、教学背景

本微课内容是切比雪夫不等式，从教学进度安排上来看，一般是在概率论第四章数字特征——方差之后介绍的，和第五章的极限定理有关联。通常，大学本科的概率论部分共包含五章，所以，前面学过的很多内容都可以在本知识点教学中使用。

从对概率学科起到的重要性上来看，概率不等式是概率论和数理统计的几乎所有分支的理论研究中必不可少的工具。切比雪夫不等式是证明大数定律的重要工具和理论基础，以切比雪夫不等式为基础发展起来的一系列不等式是研究中心极限定理的有力工具，利用该不等式可解决很多实际问题。

从历史上的来源来看，概率论是研究随机现象数量规律的科学，规

律是在大数次重复试验中呈现出来的，作为概率论中最重要同时也最精彩的极限定理揭示了各种统计规律。早期概率论数学基础不牢固，很多数学家把概率论看做是有争议的学科，排除在精密科学之外。切比雪夫是在概率论门庭冷落的年代从事其研究，1866 年发表的论文《论均值》中，提出了著名的切比雪夫大数定律，其证明方法富于创造性，是利用切比雪夫不等式给出的证明。

从学生的接受角度来看，比较易于接受，但是若仅仅给出不等式及证明，就不会体现这个不等式的重要性，所以，好的引入设计、例题、历史渊源、启后等会起到更好的教学效果。

二、教学目标

通过本知识点的学习，使学生了解切比雪夫不等式的历史背景，掌握切比雪夫不等式及其主要应用。使学生会用切比雪夫不等式解决实际问题。

通过本知识点的学习，使学生经历运用数据描述信息，做出推断的过程；让学生从对生活事例和数学现象的研究入手，学习有条理的思考与表达，体会证明的必要性，理解证明基本过程。

三、教学方法和过程

1．教学方法

启发、演示、讲练结合、多媒体教学。

2．教学重点及难点

重点是切比雪夫不等式的内涵、统计定义、主要应用。难点是切比雪夫不等式的相关证明、变形形式的综合运用。

3．教学特色

由于是微课程，要在较短的时间内讲清楚一个数学知识点，又不失

趣味性，需要好的设计，本知识点的教学设计主要有以下三个特色。

（1）关于引言的设计，采用“复习总结”“递进引导式”引入，即采用如下链条设计：学过方法的总结→研究问题→方法是用来解决问题的→曾经的解决方式→更简单的解决方式→人物→切比雪夫不等式。使学生通过引言导入，了解概率论的主要研究方法、重要研究主题、解决途径等值得思考的问题，了解切比雪夫不等式起到的估计作用、适用范围。

（2）关于例题的采编选择上，采用三种方式：一是体现新旧例题对比的题目，二是解决实际问题的题目，三是追本溯源的解决经典定律证明的题目，从各角度来介绍切比雪夫不等式及其应用，使学生掌握切比雪夫不等式及解决实际问题。并且，使学生了解切比雪夫不等式与后续课程学习的联系。

（3）关于结束的设计，采用“启后”方式，给出与下节课内容相关的两个连环思考。注重理论与趣味性的结合。

4．教学过程

教学过程：复习、引入、讲授内容、习题巩固、思考。

1）引言

“温故而知新”，前面我们学习了研究随机现象的两个主要方法：一种是用分布去研究，另一种是用数字特征去研究。那么哪种方法更简单方便呢？

相信大家心中都有了答案，数字特征法更简单！

“方法是用来解决问题的”，前面我们学习了概率论的一个很重要的研究主题，就是要去求“事件的概率”，有时更关心“X落在期望附近”的概率，比如著名的正态分布3σ原则就解决了此类问题，正态的3σ原则告诉了分布，假如分布没告诉，而是未知的，那能不能用简单的数字特征来估计此类概率呢？

很幸运，有这种方法！这都要感谢这位白胡子老爷爷，他叫切比雪夫，他给出的不等式就能“想你所想”，做到这件事。下面来学习切比雪夫不等式。

2）介绍切比雪夫不等式及其应用

首先给出切比雪夫不等式及其证明，从中解释方差的概率含义，仅

对连续型随机变量给出证明。然后通过做例题给出切比雪夫不等式的主要应用。

应用之一：切比雪夫不等式给出了在随机变量的分布未知的情况下，只利用数学期望和方差即可对事件概率进行估值的方法，这是切比雪夫不等式的重要应用。

例 1，随机变量的分布未知，已知期望和方差，用切比雪夫不等式给出 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}$ 的下界估计。

此例算出后，可以与正态分布 3σ原则进行对比，来看切比雪夫不等式的估算效果。

例 2，仪仗队海选：要选身高高的新成员，他们从体检中心获得身高数据，知道了总人数、均值和标准差，可利用切比雪夫不等式确定最多能招到多少人。

此例给出后，说明切比雪夫不等式是有实用价值的，既然这么有用，那么它是怎么来的呢？先卖个关子，做个证明后，再来说它是怎么来的！

应用之二：利用切比雪夫不等式，可以证明概率论中重要的大数定律——切比雪夫大数定律，给出例 3 证明题。很多大数定律（马尔可夫、贝努里大数定律等）都是其特例。

3）思考及展望

例 3 证完后，简要介绍这段概率论历史，引出切比雪夫不等式的历史渊源，由此启后：给出与下节课内容相关的两个连环思考。

思考一是考虑“大数定律是研究什么的定律”，思考一想清楚后，可用来考证红楼梦后 40 回的作者，即思考二，思考二是一个趣味性的结束设计。

四、教学总结

教学设计要注重知识点的逻辑性，由浅入深，由已知推未知。

选择例题时要注重连环性、多角度性、趣味性、易于生发性。

辅助材料

一、PPT 中的例题

例 1：例机变量 X 的分布未知，期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，请用切比雪夫不等式给出 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}$ 的下界估计。

解：$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geqslant 1-\sigma^2/(3\sigma)^2=\dfrac{8}{9}=0.89$ 注：对正态分布的学习中，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$P(|Y-\mu|\leqslant 3\sigma)=0.9974$。可见，在分布未知时，切比雪夫不等式的估计效果不错！

例 2：校园仪仗队要招新了！由校医院的体检中心得到这一届 1000 名新生的身高资料：平均身高 1.65（米），标准差 0.05（米）。仪伏队想招身高大于等于 1.8（米）的学生，那么，请估计最多能招到多少人？

解：设大于等于 1.8（米）学生人数为 k，

设随机变量 X 表示学生身高。

$$\frac{k}{1000}\approx P\{X\geqslant 1.8\}\leqslant P\{|X-1.65|\geqslant 0.15\}\leqslant\frac{1}{9}$$

因此，$\dfrac{k}{1000}\leqslant\dfrac{1}{9}$，可得 $k\leqslant 1000\times\dfrac{1}{9}\approx 111.1$，所以，大约最多能招到 111 人。

例 3：$X_1,X_2,\cdots$ 是两两不相关的随机变量序列，方差存在且有共同的上界，即 $D(X_i)\leqslant C$，$i=1,2,\cdots$，证明：对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon\}=1$$

证明：$E\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right]=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$，已知 X_i 两两不相关，$D\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right]=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)$

由切比雪夫不等式可得 $P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\dfrac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)$,

已知 $D(X_i)\leqslant C$，X_i 两两不相关，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)\leqslant nC$，

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

在上式中令 $n\to\infty$,并注意到概率不能大于 1，则

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon)=1$$

注：这是著名的切比雪夫大数定律，1866 年发表在论文《论均值》中。

二、练习题

练习题可以用做课上练习或者课后作业。

练习 1：某地区安装电灯，夜晚每盏灯开灯（记为事件）A 发生的概率为 0.75，假定各盏灯开关彼此独立，利用切比雪夫不等式求：安装灯的总数 n 需要多大时，才能使得开灯出现的频率在 0.74～0.76 的概率至少为 0.9？

解：设 X 为 n 盏灯中开灯的灯的个数，则 $X\sim B(n,0.75)$,

$EX=0.75n$, $DX=0.75\times0.25n=0.1875n$,

所求为满足 $P(0.74<\frac{X}{n}<0.76)\geqslant0.9$ 的最小的 n。

$P(0.74<\frac{X}{n}<0.76)$可改写为$P(0.74n<X<0.76n)$

$=P(-0.01n<X-0.75n<\ 0.01n)=P(|X-E(X)|<0.01n)$， $\varepsilon=0.01n$ 在切比雪夫不等式中取 $P(0.74<\frac{X}{n}<0.76)=P(|X-E(X)|<0.01n)\geqslant1-\frac{D(X)}{(0.01n)^2}=1-\frac{0.1875n}{0.0001n^2}=1-\frac{1875}{n}$

依题意，取$1-\frac{1875}{n}\geqslant0.9$，解得$n\geqslant\frac{1875}{1-0.9}=18750$

即安装灯的总数 n 至少取 18750 时，才能使得开灯出现的频率在 0.74～0.76 的概率至少为 0.90。

类似的练习题目：

某厂生产的产品合格率 p 为 0.9，为了确保销售，该厂向顾客承诺：每盒中正品所占比例达到 0.89～0.91 之间的概率达到 90%，问：该厂需需要在一盒中装多少产品？

投掷一枚硬币,为了至少有 90%的把握使正面向上的频率在 0. 49 与 0. 51 之间，试估计需要的投掷次数。

注：上述题目是分布形式已知，但参数未知，可以用切比雪夫不等

式估计参数的范围。

练习 2：若有 36 个学生，参加《概率统计》考试，考试成绩平均分是 80 分，标准差是 10 分，那么，请估计少于等于 50 分的人最多为多少。

解：设少于等于 50 分学生人数为 k，

设随机变量 X 表示学生分数。

$\dfrac{k}{36} \approx P\{X \leqslant 50\}=P\{|X-80| \geqslant 30\} \leqslant \dfrac{1}{9}$

因此 $\dfrac{k}{1000} \leqslant \dfrac{1}{9}$，可得 $k \leqslant 36 \times \dfrac{1}{9}=4$，便可得出结论：少于等于 50 分（与平均相差 3 个标准差以上）的人，数目大约不超过 4 个（=36*1/9）。

注：上述题目与 PPT 中例 2 类似。

此例题的引言可设计成："我们班有 36 名学生，考完概率统计以后，知道了成绩的均值和标准差，教师很想了解一下考的不理想的学生情况，也就是想估计一下少于等于 50 分的学生，最多为多少？"

接下来做此练习题。

做完后，提出思考："可能有的学生会说，一共才 36 个人，看看学生名单查一下人数不就可以了？确实可以如此，但是，如果是全校 1 万名学生呢？不同任课教师来自不同院系，互不认识，别人的学生名单是看不到的，教师又想了解自己班考的不理想的学生占全校的比例，以此促进教学改革，那该怎么办呢？切比雪夫不等式能帮助我们！"。

练习 3：一颗骰子连续掷 6 次，点数总和记为 X，试估计 $P(15 < X < 27)$。

解：设第 i 次掷得的点数为 X_i（显然 X_i 互相独立，$i=1,2,\cdots,6$），则 $X=\sum_{i=1}^{6} X_i$

由 X_i 的分布为 $P(X=X_i)=\dfrac{1}{6}(i=1,2,\cdots,6)$ 得

$$E(X_i)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$$

$$E(X_i^2)=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}=\frac{91}{6}$$

故

$$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

因而，由 X_i 的独立性有

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{6}X_i)=6E(X_i)=21$$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{6}X_i)=6D(X_i)=\frac{35}{2}$$

故 $P(15<X<27)=P(-6<X-21<6)=P(|X-E(X)|<6)\geqslant 1-\frac{D(X)}{6^2}=0.514$ 。

注：一些问题，随机变量的分布已知，或者理论上可以由已知求出来，但是不容易求。可以通过期望与方差，利用切比雪夫不等式粗略估计随机变量落入关于其期望对称区间内的概率。即在已知期望 $E(X)$ 和方差的情况下，只需将落入有限区间的概率 $P(a<X<b)$ 改写成 $P\,[|X-E(X)|<\varepsilon]$ 的形式，确定ε，再选用切比雪夫不等式进行估计。

三、与之相关的不等式

马尔可夫不等式：设非负随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 存在，则对于任意正数 a，有不等式 $P\,[X\geqslant a]\leqslant\frac{E(X)}{a}$ 成立。

证明：设 $Y=\begin{cases}0, & X<a\\ a, & X\geqslant a\end{cases}$

$\therefore E(Y)\leqslant E(X)\therefore aP(X\geqslant a)\leqslant E(X)\ \therefore P\,[X\geqslant a]\leqslant\frac{E(X)}{a}$


切比雪夫（俄）
（1821—1894）

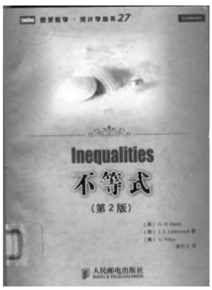

马尔可夫（俄）
（1856—1922）

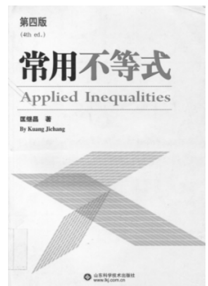
注：马尔可夫是切比雪夫的弟子，深受切比雪夫思想影响，提出并研究了一种能用数学分析方法研究自然过程的一般图式——马尔可夫链。

四、参考资料

有关数学不等式和概率不等式研究的图书资料，从中可以了解概率中著名不等式、不等式构造、分类、证明的方法。不等式以其应用的广泛性和方法的高度技巧性，被称为“创造性的艺术”。

“有时我有这样的感觉，数学（特别是分析学）就是不等式。”——M.Hazewinkel





（1）《不等式（第 2 版）》是由 Hardy、Littlewood 和 Pólya 合著的一部经典之作，由人民邮电出版社出版。内容全面涵盖了从分析、数论、拓扑到组合数学等各个数学分支中的不等式问题，也构成了数学在经济、金融、工程和物理等多个学科各种应用的基础，堪称这一领域的百科全书。本书作者均以善于化难为简而著称，全书流畅生动，适合各层次学习者阅读。

（2）《概率不等式》是由林正炎、白志东编著的，由科学出版社出版。此书收录了大量的概率不等式，对研究大样本性质有很大的帮助。因为在研究收敛问题时我们需要对概率进行一个比较准确的估计，相应的概率不等式是必需的。例如，该书第 6 章，可以通过随机变量的矩来建立概率不等式，如著名的马尔可夫、切比雪夫不等式等。

（3）《常用不等式（第 4 版）》由匡继昌编著，由山东科学技术出版社出版。收录不等式 6000 多个，不等式的常用证法 55 种，提出了 212 个未解决或值得进一步研究的问题。本书共分 17 章，包含了美国数学评论(MR)2000 主题分类中所有关于不等式论题的 40 个三级分类项目，还包括了国内外历年来大、中学生各类数学竞赛和研究生入学考试中所出

现的新的不等式，以及工程技术问题中常用的不等式，由于不等式在数学各个领域和科学技术中都是不可缺少的基本工具，加上本书起点低，因而本书的读者面非常广泛。

五、关于 PPT 中的思考题二

问：《红楼梦》后四十回是谁写的？

解释：每个作家在一定时期都形成自己的语体风格，这种风格在一定程度上可以反映在用词词频上。《红楼梦》是我国古典文学名著，近年，一些统计学家从语体风格上考证作者。

1987 年，复旦大学数学系副教授李贤平的工作引人注目。他在美国威斯康星大学的计算机前工作了数百小时，绘制了三百多张图纸，运用计算机技术中的模式识别法和统计学家使用的探索性数据分析法，对《红楼梦》进行统计分析、风格分析。他翻阅了大量的红学研究论文和资料，利用过去红学家发掘的资料进行考证。把《红楼梦》一百二十回本作为一个整体，以 47 个虚字为识别特征，对它们在书中各回的出现频率进行统计分析，输入计算机后将使用频率绘成图纸，根据图纸反映出的表明不同创作风格的星云状和阶梯状图形，提出了又一次震惊红学界的《红楼梦》成书过程新观点，证明了《红楼梦》各回写作风格具有不同的类别，各部分实际上是由不同作者在不同时期里完成的。

“频率稳定性”的现象是在大数次试验下呈现的规律，称为“大数定律”，长篇著作中“词汇频率稳定性”的理论依据就是“大数定律”。

区间估计

张　蒙
北京建筑大学

作 品 标 题：区间估计
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：区间估计概念
单正态总体均值的区间估计
知识点编码：050301　050302
授 课 对 象：工科各专业二年级学生
授 课 时 长：15：10
参 考 文 献：教材：张艳，程士珍. 概率论与数理统计[M]. 北京：石油工业出版社，2010.
参 考 书：[1]　盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，2008.
[2]　Charles J. Stone. A Course in Probability and Statistics[M]. 北京：机械工业出版社，2004.

一、教学背景

1．关于《概率论与数理统计》课程

《概率论与数理统计》是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科，它以随机现象为研究对象，讲授解决随机问题的基本概念、基本方法和基本理论，是《多元统计分析》《统计模型》等专业课程的基础课程，也是工科学生的必修课程之一。

相较于其他数学类课程，《概率论与数理统计》具有较强的应用性，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面都起到非常重要的作用。随着计算机科学的发展，以及功能强大的统计软件和数学软件的开发，这门学科得到了蓬勃的发展，不仅形成了结构完整的理论，而且在自然科学和社会科学的各个领域应用也越来越广泛。

本课程由概率论与数理统计两部分组成。概率论部分侧重于理论探讨，介绍概率论的基本概念，建立一系列定理和公式，寻求解决统计和随机过程问题的方法，其中包括随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征；数理统计部分则是以概率论作为理论基础，研究如何对试验结果进行统计推断，包括数理统计的基本概念、参数估计等内容。

通过本课程的教学，应使学生掌握概率论与数理统计的基本概念，了解它的基本理论和方法，从而使学生初步掌握处理随机事件的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

2. 关于区间估计

本节课要讲授的区间估计是参数估计的一种形式，可以弥补点估计无法判断结果的可靠性这一不足。由于区间估计的理论基础相对于点估计更加复杂，且置信区间两个端点统计量的分布依赖于总体的分布，区间估计这一问题对一般的总体并不简单。除了正态、指数等少数总体外，有不少问题还有待于探究理想的解决途径（书中只介绍了正态总体中参数的区间估计）。

二、教学目标

知识点层面：

（1）理解：置信区间、置信度的定义及其本质。
（2）掌握：单个正态总体，方差σ^2已知时，均值μ的区间估计。
（3）了解：区间估计的方法、步骤。

能力培养层面：

（1）培养学生的概率思想，以及利用概率思想解决随机问题的能力。
（2）通过构造枢轴量，培养学生发散思维能力。
（3）通过实例，培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力。

认知水平层面：

（1）培养学生认真、耐心、细致的学习态度和学习习惯。
（2）渗透数学来源于实践，又用于指导实践的观点。
（3）渗透数学知识的抽象美、对称美及反映在实际问题中的形象美，激发学生对美好事物的追求，提高学生对数学美的鉴赏力。

三、教学内容

1．置信区间、置信度的定义。
2．单个正态总体中，方差σ^2已知时，均值μ的区间估计。

四、教学重点与难点

1．教学重点

单个正态总体，方差σ^2已知时，均值μ的区间估计。

处理措施：重点讲解；启发学生主动思考；以学生熟悉的问题作为切入点，严密推导；辅以例题使学生掌握对结论的应用。

2．教学难点

对待估参数进行区间估计时枢轴量的选取。

处理措施：结合区间估计与点估计的关系和区间估计中所选枢轴量需要具备的特征，在前面已学的统计量中寻找。

五、教学设计

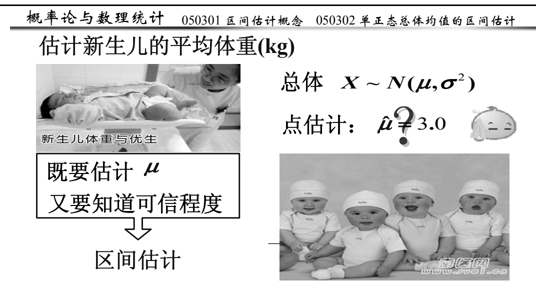
1．问题——理论——问题

这一部分内容偏重于推理，从一个简单且学生都十分熟悉的结论中找到问题的突破口，把解决问题的过程自然而有效地上升为数学上的一般理论，再运用这一理论解决实际问题，符合发现问题、分析问题、解决问题的发展过程。

2．前后呼应

教学过程始终围绕估计新生儿平均体重的问题展开，解决不同条件下对这个参数的区间估计，使学生能够更好地理解在不同条件下处理问题时所使用的方法之间的差异，有助于学生更加深刻地理解知识点。

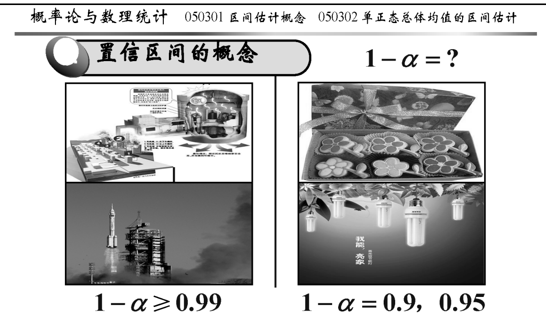
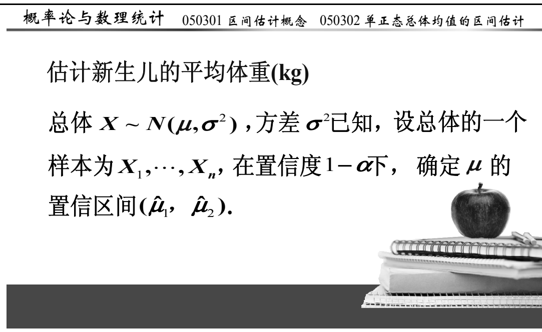
六、教学过程

教学步骤	教学内容	表达方式
1. 通过实际问题说明点估计的不足，引入本节课的教学内容 (2 分钟)	 分析估计新生婴儿平均体重这一具体问题，得到结论：正态分布的参数μ就是新生婴儿的平均体重。 区间估计介绍：找到一个区间，且这个区间尽可能包含待估	利用多媒体演示介绍点估计的弊端——无法知道结果是否正确，明确解决这一问题的方法——区间估计

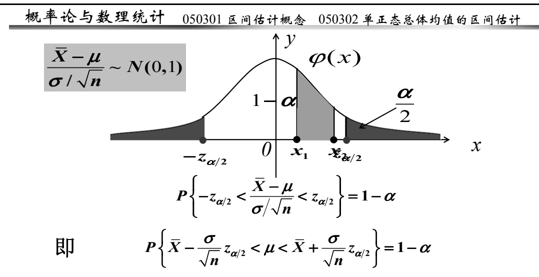
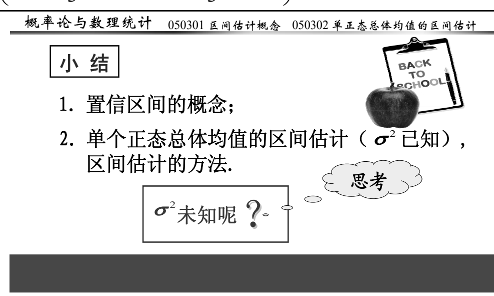
续表

教学步骤	教学内容	表达方式
2. 介绍区间估计知识点结构 (0.5 分钟)	概率论与数理统计　050301 区间估计概念　050302 单正态总体均值的区间估计 **§3　区间估计** 置信区间的概念 单个正态总体μ的区间估计 单个正态总体σ^2的区间估计 两个正态总体均值差的区间估计 两个正态总体方差比的区间估计 使学生对区间估计的内容在总体上有所认识，从微观到宏观，再到微观，进而了解所学知识点的脉络结构	多媒体演示，同时注意涉及问题之间的关系
3.给出置信区间、置信度的定义 (2 分钟)	概率论与数理统计　050301 区间估计概念　050302 单正态总体均值的区间估计 置信区间的概念 定义：设总体X含待估参数θ；根据样本$X_1,\cdots,X_n$，确定统计量$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)\ (i=1,2)$，$\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2$，使得 $P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha,\quad (0<\alpha<1),$ 则称　区间$(\hat{\theta}_1，\hat{\theta}_2)$为$\theta$的置信区间； $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限； $1-\alpha$为该区间的置信水平，也称为置信度. 说明：1.尽管θ是待估参数，但它是一个常数，真实值虽然不知道，但不会发生改变； 2.置信区间(θ_1, θ_2)是一个随机区间，随样本取值的变化而发生变化	结合常识介绍，减少学生对新知识的陌生感，更快地接受新概念. 在此过程中，以教师的陈述、分析为主
4.分析定义中的矛盾，明确解决方案 (2 分钟)	概率论与数理统计　050301 区间估计概念　050302 单正态总体均值的区间估计 置信区间的概念 估计新生儿的平均体重(kg)  (0,15)　　优先　　实用性差 (2.5,3.5)　　度低　　实用性好 分析置信度与精度之间的矛盾，指出解决这一矛盾的原则是保证置信度的前提下尽量提高精度，即使置信区间最短	通过新生儿平均体重的两个估计区间形象的引出区间估计的矛盾，加深学生对这一问题的认识

续表

教学步骤	教学内容	表达方式
5. 置信度的选取 (1 分钟)	 置信度使用概率来衡量，通常希望置信度较大. 但不同的实际问题，要求的置信度不同，选用安装核电机组，发射火箭，包装糖果，测试家用节能灯的寿命四个问题进行对比说明	应用实际问题的举例和对比，说明置信度选取的差别
6. 具体问题抽象化 (0.5 分钟)	 将问题抽象化，为下一步解决问题做好准备	将实际问题的条件和要解决的问题抽象出来，结合定义寻找结果
7. 正态总体中，当 σ^2 已知时，均值 μ 的区间估计 (4 分钟)	由点估计法可以得到 $\hat{\mu}=\bar{X}$，且正态总体的样本均值 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，将其标准化可得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。 这个统计量有三个特征：(1) 有明确的分布；(2) 其中含有待估参数；(3) 不含其他未知量。具有这三个特征的量称为枢轴量，解决区间估计问题，必须找到相应的枢轴量。 根据标准正态分布的特性，可以得到	复习正态分布概率密度曲线的特征，上分位数的定义，连续型随机变量在区间内取值概率的几何表示等相关知识，启发学生用概率的思想来思考问题

续表

教学步骤	教学内容	表达方式
	 进而得到单个正态总体，方差σ^2已知时，均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$。 在上述置信区间中，给定方差、置信度、样本值后，所有的量都能够确定，得到的是一个具体的数值区间·	
8.利用上述结论解决估计新生儿平均体重问题(2 分钟）	**例 1** 已知新生儿体重服从正态分布，且$\sigma^2=0.16$.现随机地抽查了 9 人，其体重（单位:千克）分别为 2.7,3.0,3.1,3.3,3.0,2.9,3.0,2.6,3.4. 试求μ的置信度为 95%的置信区间。 **解**：$\sigma=0.4$，$n=9$，$1-\alpha=0.95$，$z_{0.025}=1.96$，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=3.0$. μ的置信度为 95%的置信区间为 $\left(3.0-\frac{0.4}{3}\times1.96,3.0+\frac{0.4}{3}\times1.96\right)$，即$(2.739,3.261)$	通过例题加强学生对σ^2已知时，均值μ的区间估计的理解
9.小结(1 分钟)	 开放问题： http://www.opensubscriber.com/messages/r-help@r-project.org/1675.html	总结本节课的内容，理出内容主线，引发对新问题的独立思考

七、教学总结

区间估计是参数估计的重要方法之一，通过从总体中抽取的样本，在保证置信度的前提下，构造出精度最高的区间，以作为对总体分布参数真值所在范围的估计。在讲授中应加强学生对参数的理解，引导学生深刻理解置信区间的概念，掌握确定置信区间的方法，鼓励学生发散思维，去探究其他总体的参数估计。

二项分布表模板及应用

颜宁生
北京服装学院

一、高尔顿板

图 1 所示的高尔顿板是由英国统计生物学家高尔顿设计的，用很多小球落下来验证频率稳定性。

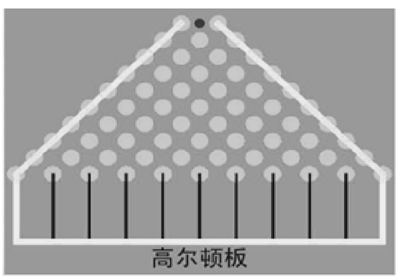


图 1

在实验过程中，随着小球下落数量的增加，小球落入板底部的盒子的分布情况呈现出二项分布规律。受到高尔顿板的启发，笔者在 Excel 中设计了一个“高尔顿板”，并通过它制作了二项分布表模板，再通过改变该模板中的数据就可以制作所需的二项分布表，本文称之为二项分布表的高尔顿形式，最后利用二项分布表的高尔顿形式就可以得到二项分布表的表格形式。

二、二项分布表模板

（一）二项分布表模板的制作原理

二项分布表模板的制作原理是，假设高尔顿板中每个钉子具有神奇的能力，它能够准确无误地将碰到它的小球分成左右两个小球，其中左小球是该小球的（1−p）倍，右小球是该小球的 p 倍，其中 $0<p<1$。这里的 p 就是高尔顿板中小球向右下落的概率。

（二）二项分布表模板的制作

将上述原理实现在 Excel 软件中就可以制作出一个二项分布表模板。

下面以制作二项分布 b（20，p）的分布表模板为例说明如何制作一个二项分布表模板。在图 2 中 p 的值虽然为 0.5，但它是可以改变的，其他单元格的值以##表示，将随着 p 的值的改变而改变。

在制作时，将每个上层值分给它下面的左右两个单元格，其中左单元格是该单元格的（1−p）倍，右单元格是该单元格的 p 倍。入口的单元格中的值设定是 1，表示小球必须经过该单元格，按照二项分布表模板的制作原理，自上而下确定图 2 中的##即可。事实上，每个单元格中的值##表示小球经过该单元格的概率，当所有的##确定完，就完成了二项分布 b（20，p）的分布表模板制作了，最后，由图 2 中的最后一行，就可以得到二项分布表的表格形式。

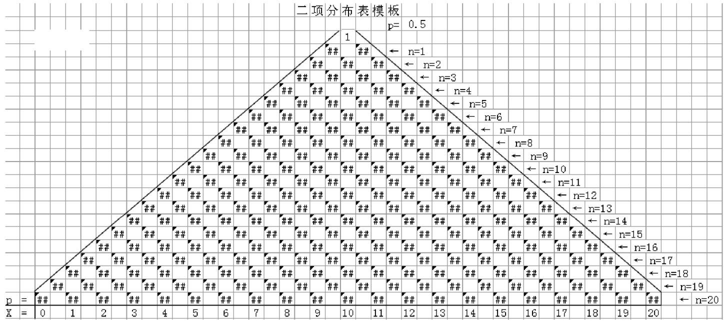


图 2

（三）制作二项分布表

在图 2 中复制前 4 行，并将 p=0.5，改成 p=0.4，就得到了二项分布 b（4, 0.4）的分布表，如图 3 所示。

						p=	0.4
			1				
		0.6		0.4			
	0.36		0.48		0.16		
0.216		0.432		0.288		0.064	

图 3

图 3 中最后一行即为二项分布 b（4, 0.4）的分布表的高尔顿形式，由图 3 能够得到分布表的表格形式，如表 1 所示。

表 1（二项分布 b（4, 0.4）的分布表）

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

如果需要制作 n=4 时的其他二项分布表，只需在图 3 中改变 p 的值即可。例如，要制作二项分布 b（4, 0.45）的分布表，只需在图 3 中将 p 的值改成 0.45 即可得到二项分布 b（4, 0.45）的分布表的高尔顿形式，如图 4 所示。

						p=	0.45
			1				
		0.55		0.45			
	0.3025		0.495		0.2025		
0.166375		0.408375		0.334125		0.091125	

图 4

在图 2 中复制二项分布表模板的前 11 行，并将 p=0.5 改成 p=0.9，就得到了二项分布 b（10, 0.9）的分布表的高尔顿形式，如图 5 所示。

													p=	0.9						
										1										
									0.1		0.9									
								0		0.2		0.8								
							0		0		0.2		0.7							
						0		0		0		0.3		0.7						
					0		0		0		0.1		0.3		0.6					
				0		0		0		0		0.1		0.4		0.5				
			0		0		0		0		0		0.1		0.4		0.5			
		0		0		0		0		0		0		0.1		0.4		0.4		
	0		0		0		0		0		0		0		0.2		0.4		0.4	
0		0		0		0		0		0		0		0.1		0.2		0.4		0.3

图 5

由于图 5 中的层数比较大，每个数字是保留到小数点后 1 位，如果想看到它保留到小数点后 6 位的数字，只需将每个数字所在的单元格拉宽即可。由图 5 中最后一行，能够得到分布表的表格形式，如表 2 所示。

表 2（二项分布 b（10, 0.9）的分布表）

X	0	1	2	3	4	5
P	1E-10	9E-09	3.645E-07	8.748E-06	0.0001378	0.001488
X	6	7	8	9	10	
P	0.0111603	0.0573956	0.1937102	0.3874205	0.3486784	

如果需要制作 n=10 时的其他二项分布表，只需在图 5 中改变 p 的值即可。比如，要制作二项分布 b（10, 0.45）的分布表，只需在图 5 中将 p 的值改成 0.45 即可得到二项分布 b（10,0.45）的分布表的高尔顿形式，如图 6 所示。

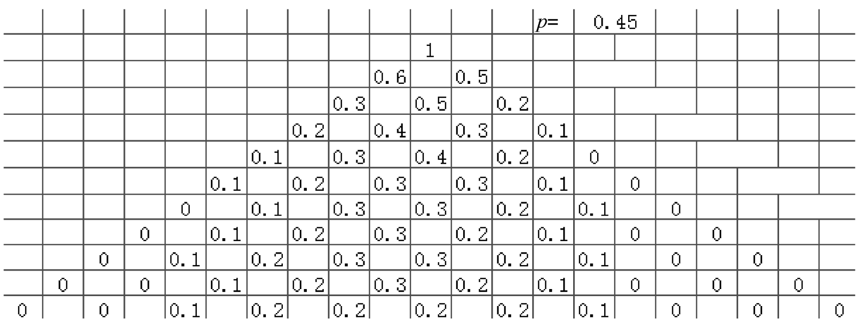


图 6

将每个数字所在的单元格拉宽即可精确到小数点后 5 位的二项分布表，如表 3 所示。

表 3（二项分布 b（10, 0.45）的分布表）

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.00253	0.02072	0.0763	0.16648	0.23837	0.23403	0.15957	0.0746	0.02289	0.00416	0.00034

三、二项分布表模板应用——第 2 章习题 7

定义：把有关二项分布的概率计算问题想象成在做“高尔顿板游戏”找出口问题，并称此过程为“高尔顿解释”。

第 2 章习题 7（1）如图 7 所示。

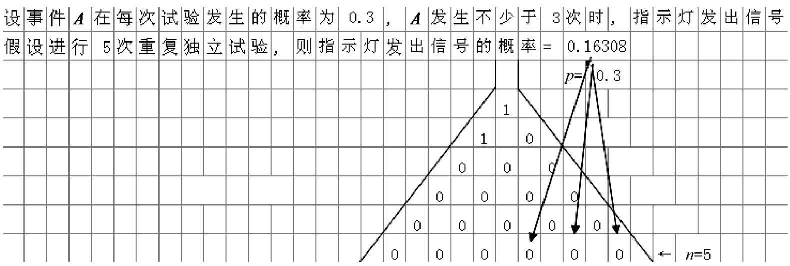


图 7

在图 2 中复制二项分布表模板的前 6 行，并将 p=0.5 改成 p=0.3，就得到了二项分布 b（5,0.3）的分布表的高尔顿形式。

习题 7（1）的高尔顿解释为：5 次重复独立实验相当于小球下落 5 层，每次试验事件 A 发生的概率 0.3 相当于小球向右落下的概率 0.3，A 发生不少于 3 次相当于小球从最后一行的后 3 个出口出来，所求概率等于下表中最后一行的后三个数字相加。图 8 所示是将这 3 个数字所在的单元格拉宽以后的子图，在图 8 中可以清楚地看到这 3 个数字。

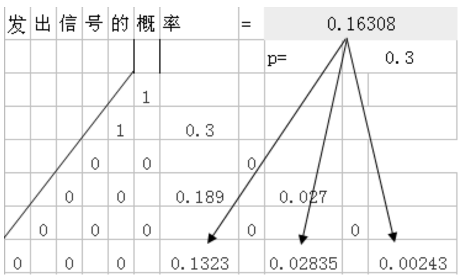


图 8

在图 7 中，将 5 改成 7 就得到了第 2 章习题 7（2），如图 9 所示。

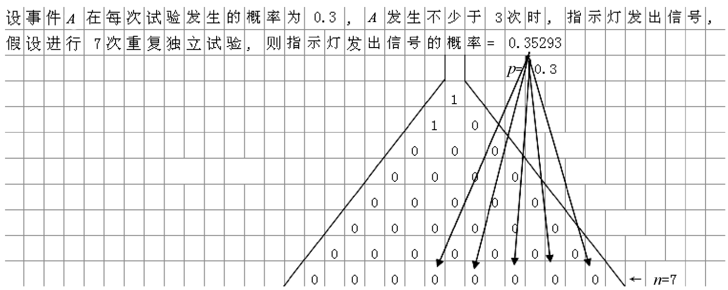


图 9

在图 2 中复制二项分布表模板的前 8 行，并将 p=0.5，改成 p=0.3，就得到了二项分布 b（7,0.3）的分布表的高尔顿形式。

习题 7（2）的高尔顿解释为：7 次重复独立实验相当于小球下落 7 层，每次试验事件 A 发生的概率 0.3 相当于小球向右落下的概率 0.3，A 发生不少于 3 次相当于小球从最后一行的后 5 个出口出来，所求概率等于下表中最后一行的后 5 个数字相加。图 8 是将这 5 个数字所在的单元格拉宽以后的子图（见图 10），在图 10 中可以清楚地看到这 5 个数字。

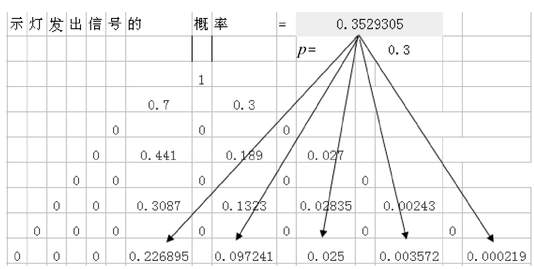


图 10

众所周知，正态分布虽然有很多，但只需要做一个标准正态分布表，关于其他正态分布的计算问题可以通过标准化转换成标准正态分布来计算。而二项分布中没有一个类似于标准正态分布的“标准二项分布”，所以，任何一个二项分布表都没办法供其他二项分布“通用”。或许这正是在《概率论与数量统计》教材附表中没有二项分布表的原因。

利用本文中的二项分布表模板对其中的数字进行修改就可以得到所需的二项分布表，具体来说，制作一个二项分布 b（n，p）表（n≤20）

只需要两步。第一步，在二项分布表模板中复制 n+1 行，第二步，修改 p 的值。在这个意义上，二项分布表模板就具有了通用性。

多年的教学实践表明，学生们很喜欢用做游戏找出口的方法完成二项分布的作业。于是就有了下面一副对联。

上联：二项分布有表任凭高尔顿解释；

下联：概率作业有戏看记分评价结果；

横批：出口游戏。

分布函数的求解

王大荣
北京工业大学

作 品 标 题：分布函数的求解
所 属 课 程：概率论与数理统计
相关知识点：随机变量的分布函数
知识点编码：0202
授 课 对 象：理工科类，本科二年级学生
授 课 时 长：10 分钟
参 考 文 献：王曦峰，王春香. 概率论中分布函数教学方法探索[J].山东轻工业我学院学报，2013,4: 68-70.

教学背景：

在学习了离散型和连续型随机变量之后，教材中直接给出了分布函数的定义，学生难以理解。尤其在求解分布函数时，学生感到无从下手。基于此，作者想通过微课这种形式，借助动画和形象的事例——沿着马路收集麦子，帮助学生突破难点。

教学目标：

理解随机变量分布函数的概念；会通过随机变量的分布律或者概率密度函数求解分布函数。

教学内容：

随机变量分布函数的求解。

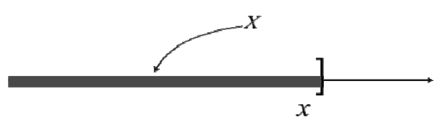
重点难点分析：

分布函数的含义是落在一点左侧（包含这点）的**所有**概率，这里本节的重点；求解连续型随机变量的分布函数是难点。

教学方法和过程：

复习分布函数的定义：对于任意实数 x，事件 $\{X \leqslant x\}$ 的概率称为分布函数，即 $F(x)=P\ \{X \leqslant x\}$ 。

通过几何图形直观帮助理解定义：

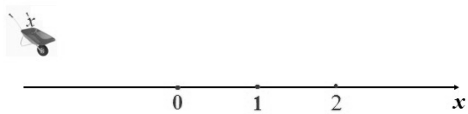


（1）如何求分布函数？（离散与连续型的例子）

例 1 $X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$，求 $F(x)$。

分析：分布函数的含义是落在一点左侧（包含这点）的**所有**概率。假定有一条笔直的马路，起点为 $-\infty$ ，终点为 $+\infty$ ，马路上在 $x=0,1,2$ 的 3 个位置各堆放了一堆麦子，麦子总质量设为 1。

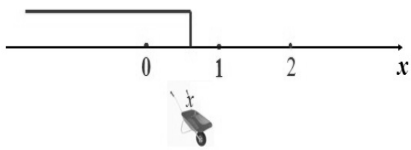
此时有个人推着一辆小推车，从起点开始往车上收集麦子，走到哪里收到哪里。那么分布函数在 x 处的函数值 $F(x)$ 就表示落入区间 $(-\infty,x]$ 的麦子总质量。



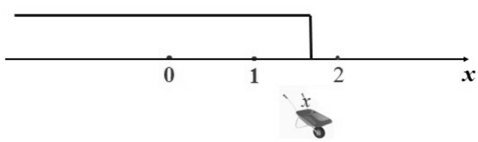
解：当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$

当 $x=0$ 时，$F(0)=P\{X\leqslant 0\}=P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$

当 $0<x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$



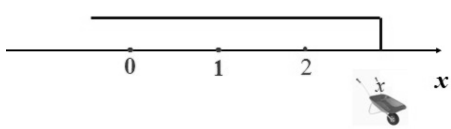
可以把 $x=0$ 和 $0<x<1$ 合并到一起，也就是等号放到区间左端点。(推着小车继续前进)



当 $1\leqslant x<2$ 时，

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

当 $x\geqslant 2$ 时，

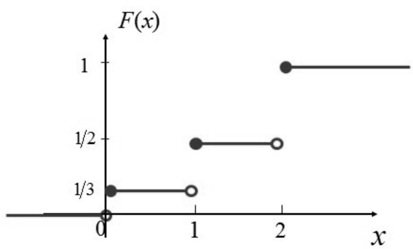


小车上收集到了全部麦子，总质量等于 1，所以有：

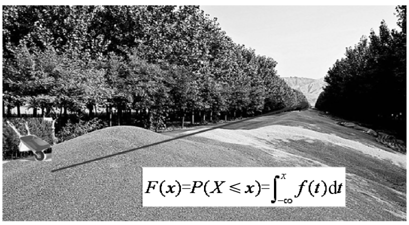
$F(x)=P\{X\leqslant x\}==P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$

综上讨论，得 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

这个随机变量分布函数的图形如下：



例 2 设 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}, & -3\leqslant x\leqslant 5\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 X 的分布函数 $F(x)$。

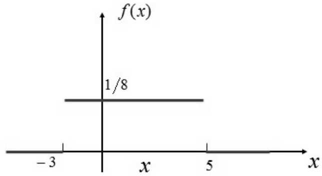


分析：仍然假定有一条笔直的马路，起点为 $-\infty$，终点为 $+\infty$，马路上堆放了质量为 1 的一层麦子。分布函数值 $F(x)$ 表示落入区间 $(-\infty,x]$ 的麦子总质量。仍然有个人推着一辆小推车，从起点开始往车上收集麦子，不再是一堆一堆的，而是一层一层的，走到哪里收到哪里。因为是一层麦子，不能像离散型那样累加，只能通过积分计算。

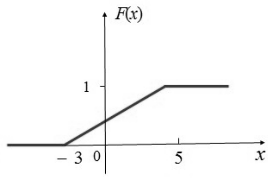
解题过程结合幻灯片，此处省略。所求分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \dfrac{x+3}{8}, & -3\leqslant x<5\\ 1, & x\geqslant 5\end{cases}$$

画出这个随机变量的概率密度函数和分布函数的图形，可以发现，这个连续型随机变量的密度函数并不是连续函数，而它的分布函数是连续函数。所以，连续型随机变量的“连续”，实质是指分布函数的连续性。



密度函数图形



分布函数图形

作业：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 2-x & 1\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 X 的分布函数 $F(x)$。

教学总结：

教学中通过引入生动的事例或者结合图形分析，能帮助学生更好地记忆和理解。本次教学通过收麦子的事例，学生很容易理解分布函数的定义。分析过程要强调一下“从起点开始往车上收集麦子，走到哪里收到哪里”。